(gyengén perspektív rekonstrukció sok képből)

2008. december 8.

1. Bevezetés

A háromdimenziós mozgásalapú objektum- és kamerarekonstrukció (angolul Structure from Motion vagy rövidítve SfM) problémája két évtizede foglalkoztatja intenzíven a számítógépes látás kutatóit. A kifejlesztett módszerek között a legismertebb, máig alkalmazott módszer a Tomasi-Kanade faktorizáció, amely a kétdimenzióban követett pontokból becsüli meg a pontok háromdimenziós koordinátáit, és a kamera pozícióját minden egyes képkockán. Az eredeti módszer egy mozgó, merev objektumnak számítja ki a térbeli koordinátáit. A módszer merőleges vetítést feltételez, melyet a későbbiekben kiterjesztettek gyenge perspektívára. A valódi perspektív faktorizáció 1996-ban jelent meg, de ez nem adott végleges megoldást, hiszen az eredmény nem pontos, hanem egy lineáris torzítás erejéig bizonytalan. Ezért itt nem is foglalkozunk a perspektív esettel.

2. A Tomasi-Kanade faktorizáció

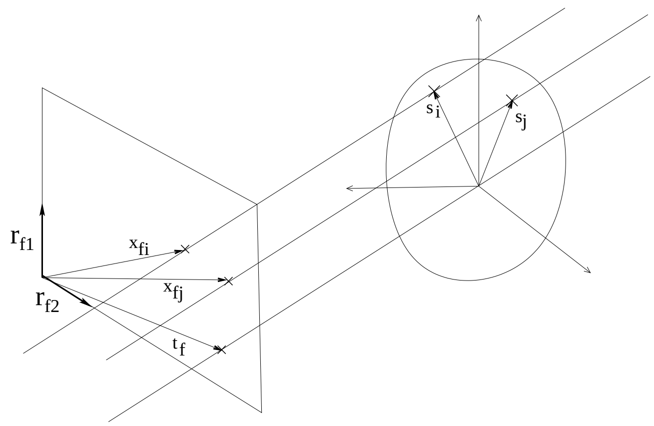
Ha adott valamely merev mozgó objektum P darab (jellegzetes) pontja, amelyeket F számú képkockán keresztül követtünk, és a p-edik követett pont koordinátáit az f-edik képen $x_{fp} = (u_{fp}, v_{fp})^T$ jelöli, akkor merőleges vetítés esetén a pont helye a következő módon számítható (lásd az 1. ábrát):

$$x_{fp} = R_f s_p + t_f, \qquad (1)$$

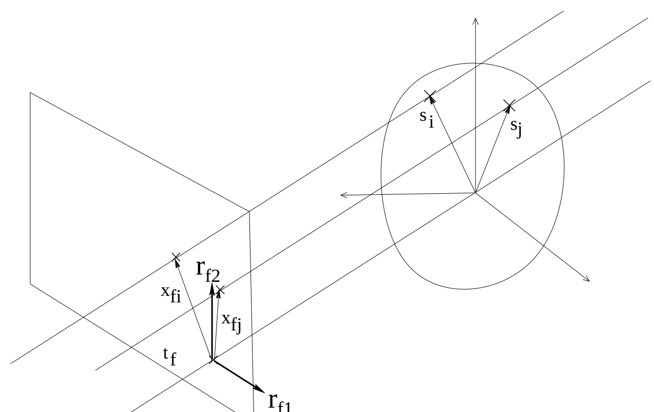
ahol $R_f = [r_{f1}, r_{f2}]^T$ ortonormált mátrix első két sora, s_p a jellegzetes pont háromdimenziós koordinátája, t_f pedig az objektum-koordinátarendszere vetületének helye a képsík origójához képest. Gyenge perspektíva esetén az összefüggés kiegészül a gyenge perspektíva q_f (nem nulla) skalárszorzójával (mindez a kamera modelleknél levezetett, gyenge perspektív vetítést leíró összefüggéssel egyezik meg):

$$x_{fp} = q_f R_f s_p + t_f, \qquad (2)$$

A t_f eltolás kiküszöbölhető, ha az objektum saját koordinátarendszerében a középpontját úgy választjuk meg, hogy az origó vetületét minden képen ismerjük (lásd a 2. ábrát). Praktikus és numerikus számítási megfontolásból a



1. ábra. Pontok (merőleges) vetítése.



2. ábra. Pontok (merőleges) vetítése, ha a koordinátarendszer középpontját két- és háromdimenzióban megfeleltetjük egymásnak.

pontok átlagát, azaz a súlypontot szokták origónak választani, hiszen merőleges vetítés esetén kétdimenzióban és háromdimenzióban is a koordináták egyszerű átlagolásával meghatározható a súlypont. Ebben az esetben felírhatjuk, hogy

$$x_{fp} = q_f R_f s_p. \tag{3}$$

Ha az összes pontot figyelembe vesszük az adott képen, a fenti egyenletből mátrixegyenletet készíthetünk:

$$\underbrace{W_f}_{2\times P} = (x_{f1}\dots x_{fP}) = \underbrace{M_f}_{2\times 3}\cdot\underbrace{S}_{3\times P} \tag{4}$$

ahol M_f neve *mozgásmátrix*, $S = (s_1, \dots, s_P)$ pedig a *struktúramátrix*. Merőleges vetítés esetén $M_f = R_f$, míg gyenge perspektíva alatt $M_f = q_f R_f$.

Ha vesszük az összes képkockát, a 4. összefüggés alapján a mérési mátrixot is kifejezhetjük:

$$\underbrace{W}_{2F\times P} = \underbrace{M}_{2F\times 3}\cdot\underbrace{S}_{3\times P}, \tag{5}$$

ahol $W^T = [W_1^T, W_2^T, \dots, W_F^T]$ és $M^T = [M_1^T, M_2^T, \dots, M_F^T]$.

A feladat a W mérési mátrix szorzattá bontása (faktorizálása), és az M mozgási, valamint az S struktúramátrix becslése. Ahogyan azt a bevezetőben olvashattuk, a Tomasi-Kanade faktorizációs módszer két lépésben végzi el a feladatot: először egy rangcsökkentéssel zajszűrést hajt végre, majd a kapott altérben elvégzi azt a transzformációt, amely végén megkapjuk a kívánt mátrixokat.

2.1. Rangcsökkentés

A W mérési mátrix SVD segítségével felbontható három mátrix szorzatára. Mivel a **??**. egyenlet alapján a W mátrix rangja zajmentes esetben 3, meg kell találni azt a 3-dimenziós alteret, amelybe a W mátrix oszlopai optimálisan vetíthetők. A főkomponens analízis [1] [**?**] legkisebb négyzetes hiba szerint optimális megoldást ad. Mindez szinguláris értékek szerinti felbontással kiszámítható: Legyen W felbontása: $W = U\Sigma V^T$, ahol Σ diagonális (téglalap alakú) mátrix tartalmazza a nemnegatív szinguláris értékeket. Ha ennek a Σ mátrixnak vesszük az első három elemét (a többit elhagyjuk), U és V mátrixoknak pedig az első három sorát ill. oszlopát hagyjuk el, az így kapott csonka mátrixokat Σ'-vel, U'-vel és V'-vel jelöljük, akkor a mozgás és a struktúramátrixokra affin becslés[2] adható: $\hat{M} = U'\Sigma'$ és $\hat{S} = V'^T$. Az $\hat{M}$ mátrixot a továbbiakban affin mozgás-, a $\hat{S}$ mátrixot pedig affin struktúramátrixnak nevezzük.

Esetünkben $\hat{M}$ tartalmazza a kamerasíkok bázisvektorainak torzított változatát, ahol a torzítás egy lineáris (azaz affin) transzformáció segítségével történik. Maga a faktorizáció a $\hat{W} = \hat{M}\hat{S}$ összefüggéssel írható le. Triviális, hogyha

[1] angolul principal component analysis - röviden PCA

[2] Azért nevezzük affin becslésnek, mert a pontos (metrikus) becslés affint transzformáltját kapjuk meg.

beillesztjük a 3×3-mas nemszinguláris Q mátrixot és inverzét az összefüggésbe, akkor a becslés pontossága nem változik: $\hat{M}\hat{S} = (\hat{M}Q)(Q^{-1}\hat{S})$. A kérdés csak az, hogyan lehet a Q transzformációt meghatározni.

Legyen $R = \hat{M}Q$, ahol $R = [r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{F1}, r_{F2}]^T$ tartalmazza a kamerasíkok bázisvektorait. Tudjuk, hogy ezek a vektorok nem lehetnek tetszőlegesek: egyazon sík két bázisvektorának merőlegesnek kell lennie, hosszuknak egységnyinek (merőleges vetítés esetén), vagy azonosnak (gyenge perspektíva esetén).

A további fejezetekben az $M = \hat{M}Q$ és az $S = Q^{-1}\hat{S}$ mátrixokat valós mozgás- és struktúramátrixoknak fogjuk nevezni.

2.2. Megkötések alkalmazása merőleges vetítés esetén

Ha az összes képkockára felírjuk a fenti megkötéseket, Q^TQ-ra túlhatározott lineáris egyenletrendszert kapunk, ezért Q-ra zárt alakú megoldás adható, amelyet először Morita és Kanade publikált [?] 1994-ben. Merőleges vetítés esetén a bázisvektorok ortonormáltak. Mindez képkockánként három megkötést eredményez:

$$\begin{aligned} r_{f1}^T r_{f1} &= \hat{m}_{f1}^T Q^T Q \hat{m}_{f1} = 1, \\ r_{f2}^T r_{f2} &= \hat{m}_{f2}^T Q^T Q \hat{m}_{f2} = 1, \\ r_{f1}^T r_{f2} &= \hat{m}_{f1}^T Q^T Q \hat{m}_{f2} = 0 \end{aligned}$$

Vezessük be a szimmetrikus L mátrixot:

$$L = Q^T Q = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_4 & l_5 \\ l_3 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A megkötések alapján L mátrix optimálisan meghatározható a kapott túlhatározott lineáris egyenletrendszer segítségével:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^T(\hat{m}_{11}, \hat{m}_{11}) \\ g^T(\hat{m}_{12}, \hat{m}_{12}) \\ g^T(\hat{m}_{11}, \hat{m}_{12}) \\ \cdots \\ g^T(\hat{m}_{F1}, \hat{m}_{F1}) \\ g^T(\hat{m}_{F2}, \hat{m}_{F2}) \\ g^T(\hat{m}_{F1}, \hat{m}_{F2}) \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

vagy egyszerűen $l = G^{\dagger}c$, ahol $G^{\dagger}$ a G mátrix Moore-Penrose-féle pszeudoinverze [?], és $g(a, b)$ az alábbi vektor egyszerűsített jelölése:

$$g^T(a, b) = [a_1b_1, a_1b_2 + a_2b_1, a_1b_3 + a_3b_1, a_2b_2, a_2b_3 + a_3b_2, a_3b_3],$$

Q mátrix pedig mindezek után L sajátérték-felbontása alapján könnyen meghatározható.

2.3. Megkötések gyenge perspektíva esetén

Gyenge perspektíva esetén szintén a fenti gondolat szerint szintén meghatározhatjuk a Q mátrixot, ahogyan azt Weinshall és Tomasi [?] 1995-ben meg is mutatta.

A megkötéseket gyenge perspektíva esetén módosítani kell. Eszerint az azonos képkockához tartozó r_{f1} és r_{f2} bázisvektorok hosszának egyenlőnek, irányuknak egymásra merőlegesnek kell lennie:

$$\begin{aligned} r_{f1}^T r_{f1} &= r_{f2}^T r_{f2} \\ r_{f1}^T r_{f2} &= 0 \end{aligned}$$

A 7. egyenlet a következőképpen módosul:

$$G_{weak} = \begin{bmatrix} g(\hat{m}_{11}, \hat{m}_{11}) - g(\hat{m}_{12}, \hat{m}_{12}) \\ g(\hat{m}_{11}, \hat{m}_{12}) \\ \cdots \\ g(\hat{m}_{F1}, \hat{m}_{F1}) - g(\hat{m}_{F2}, \hat{m}_{F2}) \\ g(\hat{m}_{F1}, \hat{m}_{F2}) \end{bmatrix} = c_{weak} \tag{8}$$

és $c_{weak} = [0, 0, \ldots, 0, 0]^T$. $G_{weak} l = c_{weak}$-re optimális megoldás $l = 0$, amely számunkra nem megfelelő. Ezért szükséges még egy megkötést tenni: keressük azt a megoldás, amely esetében l vektor hossza egységnyi, azaz $l^T l = 1$. A lineáris algebrából jól ismert tény [?], hogy az optimális megoldást a $G_{weak}^T G_{weak}$ mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektor adja meg.

3. A Tomasi-Kanade faktorizáció kiterjesztése hiányzó adatok esetére

3.1. A faktorizáció javítása alternálással

Ebben a szakaszban a Tomasi-Kanade faktorizáció javított változatait mutatjuk be. Ahogyan azt a korábbiakban leírtuk, az eredeti módszer gyengéje a rangcsökkentés: a szinguláris érték felbontás után a mérési mátrixunk rangját 3-ra csökkentjük, ami egyfajta korlátot is jelent: a rangcsökkentés után az eredmény már nem tud kilépni a 3-dimenziós altérből.

A javító algoritmus iteratív alapon működő hibaminimalizálás. Első lépésben a paramétereknek kell kezdőértéket találni, majd megkezdődhet az iteráció, amely során a mozgás- és a struktúramátrixot egymástól függetlenül finomítani lehet. A szakirodalomban a módszert alternációnak[3] hívják.

3.1.1. Visszavetítési hiba

A későbbiekben szükség lesz egy hibamértékre, amely azt mutatja meg, hogy a faktorizáció milyen pontosságú. Erre a mátrixszorzat és az eredeti mérési mátrix

[3] angolul: alternation

különbségmátrixának Frobenius-normája, azaz a különbségmátrix elemeinek a négyzetösszege alkalmas:

$$\epsilon = ||W - MS||_F^2 \tag{9}$$

Célunk ennek a költségfüggvénynek a minimalizálása $M_f M_f^T = q_f E, \forall f$ megkötéssel, ahol E a magyar terminológia szerint az egységmátrixot (esetünkben 2×2-est) jelöl, q pedig valós szám.

A javasolt módszer megadott kiindulási pontból megkeresi a visszavetítési hiba legközelebbi lokális minimumát. A globális minimum elérését sajnos nem tudjuk garantálni, de így is sokat tud az eredmény minőségén javítani, ahogyan azt a vizsgálati eredményeknél látni fogjuk. Kiindulási értéknek a Tomasi-Kanade faktorizáció eredményéül kapott mozgás- és struktúramátrixokat választjuk, és M_0-val, illetve S_0-val jelöljük.

A hibafüggvény minimumát a szakirodalomban is ismertetett alternációs módszer [**?**] adja. Eszerint a hibafüggvényt két lépésben érdemes csökkenteni: először rögzített mozgásmátrix esetén a struktúramátrixot finomítjuk, majd rögzített struktúramátrix mellett optimalizáljuk a mozgásmátrixot. A lépéseket S- és M-lépésnek hívjuk. Emellett bevezetünk egy kiegészítő lépést is, amelyik az M-lépést segíti elő.

Az algoritmus véges időben befejezi a futását, ha megadunk egy ϵ küszöböt, aminél kisebb hibacsökkenés esetén az algoritmus befejezi az M és S mátrixok értékeinek optimalizálását. A gyakorlatban az iterációs számot fixre is vehetjük, mivel tapasztalataink szerint néhány lépésben nagyon közel kerülünk a lokális optimumhoz.

3.1.2. Kiegészítő lépés

A kiegészítő lépés csupán egy segédlépés, amely az M-lépés működését segíti elő. Eredetileg egy képkockához két sor tartozik a W mérési és M mozgásmátrixban, a kiegészítő lépés segítségével ezt háromra növeljük, így az M-lépésnél háromdimenziós regisztrációs technikát alkalmazhatunk az optimális mozgásmátrix kiszámítására.

A mozgásmátrix f-edik képkockájához tartozó M_f almátrix két sorvektorból áll: $M_f = [m_{f,1}^T m_{f,2}^T]^T$. Ezt a mátrixot kiegészíthetjük egy harmadik sorral: $\tilde{M}_f = [m_{f,1}^T m_{f,2}^T m_{f,3}^T]^T$, ahol $m_{f,3}$ iránya megegyezik az első két vektor ($m_{f,1}$ és $m_{f,2}$) vektoriális szorzatának irányával, hossza pedig az első két vektor hosszának átlaga legyen.

Nemcsak a mozgásmátrix, hanem a W_f mérési részmátrix is kiegészíthető egy harmadik sorral: a harmadik sorvektor legyen $m_{f,3}^T S$, a kiegészített mérési mátrixot pedig jelöljük $\tilde{W}$-vel.

3.1.3. S-lépés

A S-lépés célja az $S^{(k)}$ struktúramátrix kiszámítása a mérési és a mozgásmátrixból. Mivel az S struktúramátrix elemei tetszőleges valós értékeket vehetnek fel, a hiba a Moore-Penrose féle pszeudoinverz segítségével legkisebb négyzetes értelemben optimálisan számolható:

$$S^{(k)} = M^{(k-1)^\dagger} \tilde{W}_f^{(k-1)} \tag{10}$$

ahol $M^{(k-1)^\dagger}$ jelöli a Moore-Penrose-féle pszeudoinverzét a $M^{(k-1)}$ mátrixnak.

3.1.4. M-lépés

Az M lépés célja $M^{(k)}$ meghatározása $\tilde{W}^{(k)}$-ból és $S^{(k)}$-ból.

Triviális, hogy M_i paramétereinek az értéke teljesen független M_j paramétereitől, feltéve, hogy $i \neq j$. Tehát képkockánként külön lehet számítani a mozgás paramétereit.

A feladat tehát a háromdimenziós pontokat tartalmazó S mátrix vetítését meghatározni az $M_f = q_f S^{(k)}$ mozgásmátrixszal. A vetítés eredménye optimális esetben a mérési mátrix W_f. Ha a W_f mérési mátrix három sort tartalmazna, a feladatot visszavezethetnénk háromdimenizós pontfelhők regisztrációjára, mely feladatot legkisebb négyzetes értelemben optimálisan meg tudunk oldani, ahogyan azt korábban már levezettük.

Ennek érdekében kell elvégezni a kiegészítő kiegészítést. A kiegészítést úgy kell megoldani, hogy a lehető legkisebb hibát vigyük be a rendszerbe. A javasolt kiegészítő lépés a hiba értékét nem növeli, hiszen a harmadik sorral a Frobenius-norma értéke nem változik. Ugyanakkor a regisztrációt természetszerűleg rontja, hiszen a harmadik sor próbálja az eredeti állapotban tartani regisztrációs mátrixot, míg az első két sor az új megoldás felé viszi. Emiatt a konvergencia sebességet csökkenti. Ezzel együtt is gyors a módszer, ahogyan azt a vizsgálatok során majd látni is fogjuk.

A függelékben ismertetett módszer szerint az optimális R_f elforgatás a következő összefüggéssel számítható: $R_f = V_f U_f^T$, ha $H_f = U_f \Lambda_f V_f^T$ az alábbi mátrix szinguláris érték szerinti felbontásából adódik:

$$H_f = \sum_{p=1}^{P} s_p \tilde{w}_{fp}^T, \tag{11}$$

ahol s_p az S struktúramátrix p-edik oszlopa, $\tilde{w}_{fp}$ pedig a kiegészített mátrix megfelelő koordinátahármasa.

Az optimális skálázás pedig így számítható:

$$q_f = \frac{\sum_{p=1}^{P} \tilde{w}_{fp}^T R_f s_p}{\sum_{p=1}^{P} s_p^T s_p}. \tag{12}$$

3.1.5. Az algoritmus lépéseinek összefoglalása

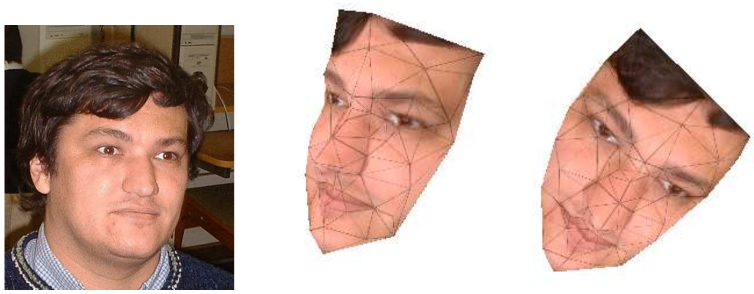
Az iteratív algoritmus a következő lépésekben foglalható össze:

1. Tomasi-Kanade faktorizáció

2. Kiegészítő lépés: minden harmadik sort (M és W mátrixokban) a kiegészítés adja meg
3. S-lépés: pszeudoinverz segítségével
4. Kiegészítő lépés
5. M-lépés
6. Amíg a hiba csökkenése a megadott küszöb felett van, goto 2.

3.1.6. Példa az algoritmus működésére

A 3. ábrán láthatunk egy arcrekonstrukciós példát. A javasolt algoritmus a kézzel kijelölt pontokból sikeresen rekonstruálta az arc háromdimenziós modelljét. Jól látható, hogy például az orr vagy a szemgödör a valósághoz hasonlóan emelkedik ki, illetve süllyed be az arc többi részéhez képest.



3. ábra. Egy kép a sorozatból és a rekonstruált 3D-s modell.

3.2. Rekonstrukció hiányzó adatok esetén

A 3. fejezet eddig a faktorizáció javításáról szól. A javítás hatása sok pont esetén elenyésző, jelentőssége akkor van, ha viszonylag kevés pontból építjük fel a modellünket. (Ennek robusztus becslés esetén van kiemelt e jelentőssége.)

Azonban sok pontos rekonstrukció esetén is használható az alternálás. Eddig ugyanis feltételeztük, hogy minden egyes pont minden egyes képen látszik. Ez a valóságban ritkán teljesül. (Gondoljunk egy körbeforgó asztalra, amin levő tárgyat folyamatossan vesszük fel: az első képen látszó pont 180 fokkal odébb forgatva biztosan takarásban lesz.)

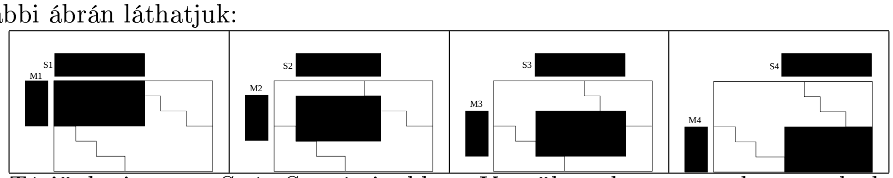
3.2.1. Kezdeti érték becslése

Szerencsénkre a Tomasi-Kanade faktorizáció már 4 pont és 3 kép esetén is kiszámítható. (Az ismert koordináták száma $2*3*4 = 24$, az ismeretlenek száma - 4 paraméter per kép, 3 koordináta per pont - $3*4+4*3 = 24$, tehát a feladat megoldható). Ezért az alapelv a következő: vesszük azokat a pontokat, amelyek az első három képen végig látszanak, és elvégezzük a faktorizációt. Majd vesszük a 2-4. képeken látszó pontokat, és azokra is elvégezzük a faktorizációt. Ezek után van két rekonstrukciónk. Jelöljük S_1-gyel és S_2-vel a rekonstruált 3D-s pontokat tartalmazó struktúramátrixokat. M_1-gyel és M_2-vel pedig a hozzájuk tartozó mozgásmátrixat. Mivel a közös súlypont nem ismert, a faktorizációhoz szükség van az eltolásokra is. Tehát ha az 1-3. képeken látható súlypont t_1, a 2-4. képekhez tartozó súlypont t_2, akkor a faktorizáció így írható fel:

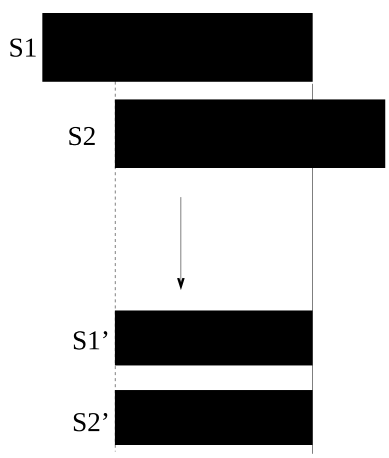
$$[M_1|t_1]\begin{bmatrix} S_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_2|t_2]\begin{bmatrix} S_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Folytathatjuk a rekonstrukciót a 3-5, 4-6...stb. képeken, ahogyaz azt az alábbi ábrán láthatjuk:



Térjünk vissza az S_1 és S_2 mátrixokhoz. Vegyük azokat a pontokat, amelyek mindkét struktúramátrixban megtalálhatók, és jelöljük ezeket az almátrixokat S_1'-gyel, illetve S_2'-vel:



Tudjuk, hogy optimális esetben S_1' összeregisztrálható S_2'-vel, azaz létezik egy olyan transzformáció, hogy (gyenge perspektív vetítést feltételezve)

$$S'_{1,i} = qR(S'_{2,i} - o_2) + o_1$$

minden i indexű pont esetén (ahol i maximális értéke az S_1' -ben és S_2'-ben levő pontok száma), ahol q az optimális skálázás, R az optimális ortonormált transzformáció, o_1 és o_2 pedig a két 3D-s ponthalmaz súlypontja. Ezzel a kért ponthalmazt már össze is regisztráltuk. Beszorzással ellenőrizhetjük, hogy ha a struktúrát (3D-s pontokat) a fentiek szerint megváltoztatjuk, és az eltolást és a mozgást a következő összefüggés segítségével módosítjuk, akkor a faktorizáció nem változik:

$$M_2 \leftarrow \frac{1}{q} M_2 R^T$$

$$t_2 \leftarrow t_2 + M_2 o_2 - \frac{1}{q} M_2 R^T o_1$$

Általános esetben írhatjuk, hogy

$$S_j \leftarrow q_j R_j (S_j - o_{2,j}) + o_{1,j}$$

$$M_j \leftarrow \frac{1}{q_j} M_j R_j^T$$

$$t_j \leftarrow t_j + M_j o_{1,j} - \frac{1}{q_j} M_j R_j^T o_{1,j}$$

3.2.2. Alternáció

Szerencsénkre a kezdeti érték meghatározása után az alternáló algoritmus minden egyes lépése alkalmazható hiányzó adatok esetére. Az algoritmusban a változás a következő pontokban foglalható össze:

- S-lépés: Eddig egy tömör formában összefoglaltuk a megoldás: $S = M^\dagger W$. Most sajnos pontonként kell elvégezni az optimális becslést, és csak azokat az értékeket szabad figyelembe venni, amelyik nem hiányzik. A feladat értelemszerűen továbbra is lineáris, ezért a pszeudoinverz operátor alkalmazható.

- M-lépés: Az M-lépés esetén az S struktúramátrixot rögzítjük, és az M mátrixot optimálisan beállítjuk. Az optimalizálást minden képkockára külön-külön elvégezhetjük. Jelöljük M^f-fel az f-edig képhez tartozó mozgásadatot (részmátrixot), W^f-fel a megfelelő pontokat. Tudjuk, hogy $(M^f)^T(M^f) = qE$ (ahol E egy 2×2-es egységmátrix). Ha M^f-et kiegészítjük egy harmadik sorral, mely merőleges az előző kettőre, és a hossza megegyezik az előző kettő sor hosszával; továbbá W^f-et is kiegészítjük egy harmadik sorral, melyet úgy kapunk meg, hogy az M^f harmadik (új) sorát megszorozzuk S-sel. Ezek után a feladat: keresni egy olyan 3D-s hasonlósági transzformációt, amely S mátrix soraiban lev§ő 3D-s pontokat a kiegészített W^fsoraiba viszi át. (A transzformáció során eltolást, forgatást és skálázást engedünk meg.) Ezt a feladatot pedig regisztrációs problémaként korábban már megoldottuk.

A fenti két lépést addig ismételjük, amíg a hiba csökkenése meg nem áll. Fontos megjegyezni, hogy az M-lépésben alkalmazott kiegészítést érdemes minden lépés előtt megismételni.