PROJEKTÍV MEGFELELTETÉS KÉT KÉP KÖZÖTT

1. Feladat

Adott két kép, mindkét képkockán kiválasztunk egymásnak megfelelö, a térben egy síkra esö pontokat. Célunk annak a transzformációnak a meghatározása, amelyik tetszöleges pontot transzformál az egyik képröl a másikra.

2. Projektív vetítés

Tegyük fel, hogy az elsö és a második képen N darab képet megfeleltettünk egymásnak. Az i. pont koordinátái legyenek (x_i^1, y_i^1) és (x_i^2, y_i^2)az elsö és a második képen. Ennek a pontnak a térbeli koordinátáit jelöljük $(X, Y, 0)$-val. (Az általánosság sérelme nélkül felvehetjük úgy a térbeli koordinátarendszert, hogy a sík - amin a pontok elhelyezkednek - a $Z = 0$ egyenlettel írható le.)

A kamerát a térbeli koordinátarendszerben egy R forgatási mátrix és t eltolási vektor segítségével adható meg. Azaz, ha a világ koordinátarendszerét áthelyezzük a fókuszpontba, az új koordinátrandszerben így írhatjuk le a pontot:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} + t = [\tilde{R}|t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ahol $\tilde{R}$ az R mátrixszal egyenlö, de csak az elsö két oszlopot tartalmazza.

A vetítés a jól ismert projektív összefüggés segítségével számítható:

$$u_i = \frac{f}{Z} X' + u_o$$

$$v_i = \frac{f}{Z} X' + v_o$$

ahol f a fókusztávolság, (u_0, v_o)pedig az ún döféspont (az a pont, ahol a fókuszpontból a képsíkra állított meröleges metszi a képsíkot).

Ha megszorozzuk az egyenletek mindkét oldalát, bevezetjük a homogén koordinátákat, az alábbi mátrix-alakos összefüggést kapjuk:

$$Z' \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 - ft \\ 0 & f & v_0 - ft \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

A homogén koordináták (ide kell egy hivatkozás!) skalárszorzat erejéig szabadon választhatók. Ebben az esetben a skalárszorzó a Z mélység is lehet:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 - ft \\ 0 & f & v_0 - ft \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az eredeti koordinátákat visszakaphatjuk:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 - ft \\ 0 & f & v_0 - ft \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\tilde{R}|t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vezeesük be a P projekciós mátrixot:

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 - ft \\ 0 & f & v_0 - ft \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\tilde{R}|t]$$

Jól látszik, hogy P mérete 3×3, rangja pedig szintén 3.
Az $[u_i, v_i, 1]^T = P[X, Y, 1]^T$ összefüggés alapján:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \sim P^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az elsö és a második objektum között a kapcsolatot le lehet írni (ha P_1 jelöli a kép vetítését az elsö, P_2 pedig a második képre):

$$\begin{bmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ 1 \end{bmatrix} \sim P_2 P_1^{-1} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Végezetül bevezetjük az ún. homográfia mátrixot: $H = kP_2P_1^{-1}$, valamint a skálázatlan homográfia mátrixot (jele: $\tilde{H}$). Így a projektív kép-kép megfeleltetés az alábbi módon írható le (mivel a $\sim$ operátor egy skalárszorzatot jelent):

$$\begin{bmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ 1 \end{bmatrix} = k\tilde{H} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A H mátrixot felírjuk 9 paraméterrel, az egyenletetünk tovább alakítható:

$$\begin{bmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Feladat a megadott pontok alapján megbecsülni a H mátrixot.

3. H HOMOGRÁFIAMÁTRIX BECSLÉSE

Bontsuk ki a fenti projektív egyenletet:

$$u_i^2 = \frac{h_{11}u_i^1 + h_{12}v_i^1 + h_{13}}{h_{31}u_i^1 + h_{32}v_i^1 + h_{33}}$$

$$v_i^2 = \frac{h_{21}u_i^1 + h_{22}v_i^1 + h_{23}}{h_{31}u_i^1 + h_{32}v_i^1 + h_{33}}$$

A (közös) nevezövel megszorozva az egyenletek módosulnak:

$$(h_{31}u_i^1 + h_{32}v_i^1 + h_{33})u_i^2 = h_{11}u_i^1 + h_{12}v_i^1 + h_{13}$$

$$(h_{31}u_i^1 + h_{32}v_i^1 + h_{33})v_i^2 = h_{21}u_i^1 + h_{22}v_i^1 + h_{23}$$

Ez 2 egyenlet (méghozzá homogén), az ismeretlenek a H mátrix elemei. Annyiszor két egyenletünk van, ahány pontot meg tudtunk feleltetni. Mivel az egyenlet homogén, azt is jelenti, hogy valójában van egy szabadságfokunk. Ezért kétféle megoldást is tudunk a módszerrel: megoldani homogén egyenletrendszereként, vagy átírni inhomogén egyenletrendszerre. Ha 4 pontunk van, az egyenletrendszer egzaktul megoldható (kivéve a degenerált eseteket, pl. amikor a pontok egy egyenesre esnek), 4-nél több esetben túlhatározott egyenletrendszert kapunk, amelyet a legkisebb négyzetek módszere szerint optimálisan meg tudunk oldani (hivatkozás kell ide!!!).

3.1. **Homogén túlhatározott egyenletrendszer megoldása.** Ha a páros és páratlan sorokat felírjuk az i. pontra, megkapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} u_i^1 & v_i^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_i^1u_i^2 & -u_i^2v_i^1 & -u_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^1 & v_i^1 & 1 & -v_i^2u_i^1 & -v_i^2v_i^1 & -v_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vezessük be az alábbi rövidítéseket:

$$A_i = \begin{bmatrix} u_i^1 & v_i^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_i^1u_i^2 & -u_i^2v_i^1 & -u_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^1 & v_i^1 & 1 & -v_i^2u_i^1 & -v_i^2v_i^1 & -v_i^2 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix}$$

Ha az összes pontra felírjuk az egyenleteket, kapunk egy $Ah = 0$ alakú inhomogén egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Egy megkötést is kell tennünk: legyen a h vektor hossza (Frobenius normája) egységnyi. Ekkor az egyenletrendszer optimális megoldása az $A^T A$ mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

3.2. **Inhomogén túlhatározott egyenletrendszer megoldása.** Itt egy másik megkötést alkalmazunk: legyen $h_{33} = 1$. Az egyenletrendszert az i. pontra ekkor így írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} u_i^1 & v_i^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_i^1 u_i^2 & -u_i^2 v_i^1 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^1 & v_i^1 & 1 & -v_i^2 u_i^1 & -v_i^2 v_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \end{bmatrix}$$

Alkalmazva az alábbi jelöléseket:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u_i^1 & v_i^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_i^1 u_i^2 & -u_i^2 v_i^1 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^1 & v_i^1 & 1 & -v_i^2 u_i^1 & -v_i^2 v_i^1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{h} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix},$$

$$c_i = \begin{bmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \end{bmatrix}$$

továbbá: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_n \end{bmatrix}$ és $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix}$,az egyenletrendszer $\tilde{A}\tilde{h} = c$ alakú. Ennek az optimális megoldása pedig:

$$\tilde{h} = (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T c$$