Kötegelt behangolás (bundle adjustment)

Hajder Levente

December 3, 2007

A $W = MS$ faktorizációs feladat megoldásának finomítására a legelterjedtebb módszer az ún. kötegelt behangolás. Feltételezi hogy mind a kamera-. mind a struktúramátrixra kezdeti becslés létezik. A módszer a Levenberg-Marquardt minimalizálási eljáráson alapszik, amelyet itt röviden áttekintünk.

1 Levenberg-Marquardt minimalizálás

Adott egy $y = f(x)$ költségfüggvény, ahol y egy skalár, x pedig egy tetszõles dimenziójú vektor. A cél x függvényében a költségfüggvény minimumának a megtalálása.

A Levenberg-Marquardt módszer a Gauss-Newton és a gradiens módszerek keveréke. Az eredeti Newton módszer feltételezi, hogy a hibafüggvény kvadratikus, és az elsõ és másodrendû parciális deriváltakból a kvadratikus hibafelület minimumhelyét egy lépésben ki lehet számítani. A Gauss-Newton módszer abban különbözik az eredeti Newton módszertõl, hogy a második parciális deriváltakat sem számolja ki.

A hibafüggvény általános esetben nem kvadratikus, ahogyan ezt a Gauss-Newton eljárás feltételezi, ezért szükség van egy másik tagra is, amely a "nagyon nem kavadratikus" esetekben átveszi a minimumkeresést, és a legmeredekebb lejtõ irányába tereli a paraméterek változtatását.

Maga a módszer iteratív, minden egyes lépésben az alábbi szabály alapján változtatja az optimalizálandó paraméterkeet az eljárás:

$$\Delta x = (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T \epsilon_p, \tag{1}$$

ahol J a Jacobi mátrix, λ pedig egy paraméter, amely a két tag közötti súlyozást végzi el. A paraméterek értékét az $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ összefüggés adja meg.

A hangoló λ paraméter értékét folyamatosan változtatni kell. Abban az esetben, ha az $||y - f(x)||$ hiba értéke növekszik, a paramétert nem szabad változtatni, λ értékét pedig csökkenteni kell. Ha csökken a hibafüggvény, a paraméter változtatható, λ-t pedig növelni kell.

A Levenberg-Marquardt algoritmusról az olvasó részletesen olvashat a nemlineáris optimalizálásról szóló jegyzetben.

2 A Levenberg-Marquard módszer alkalmazása az objektum-rekonstrukciós feladatra

A Levenberg-Marquardt algoritmus minden olyan esetben jól alkalmazható, amikor a hibafüggvényt fel tudjuk írni a a beállítandó paraméterek függvényében.

Az objektum-rekonstrukciós módszer esetében a vetítési egyenletek felírhatóak, és a parciális deriváltak könnyen kiszámíthatóak. Mégsem lehet alkalmazni a módszert, mert a nemlineáris optimalizálási eljárások nem képesek, csak viszonylag kevés (tipikusan néhányszor tíz) paraméter beállítására, hiszen a hangolási szabály alapján a $(J^T J + \lambda I)$ mátrixot kell invertálni, amely mátrix sorainak és oszlopainak száma a paraméterek számával lineárisan nõ. Az objektum-rekonstrukciós feladatnál ez a szám nagy lehet, hiszen például 500 pontot és 10 képkockát feltételezve $3 \cdot 500 + 10 \cdot 4 = 1540$ paraméter beállítását kell megoldani.

Ezt a problémát a kötegelt behangolás segítségével oldották meg. A Gauss-Newton módszer alapját képezõ $J^T J \Delta x = J^T \epsilon_p$ ún. normálegyenlet a 1 ábrának megfelelõen ritka struktúrájú lesz, köszönhetõen annak, hogy a Jacobi-mátrix szintél ritka.

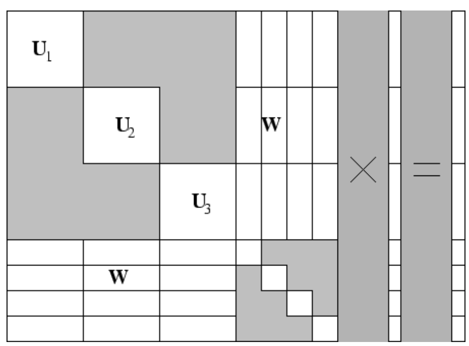

Figure 1: A normálegyenlet struktúrája az objektum-rekonstrukciós feladatnál.

A normálegyenlet így írható fel:

$$\begin{bmatrix} U & X \\ X^T & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_s \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ha balról megszorozzuk a

$$\begin{bmatrix} I & -XV^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

mátrixszal az egyenletrendszert, a következõ összefüggést kapjuk:

$$\begin{bmatrix} U - XV^{-1}X^T & 0 \\ X^T & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_m - XV^{-1}\epsilon_s \\ \epsilon_s \end{bmatrix}.$$

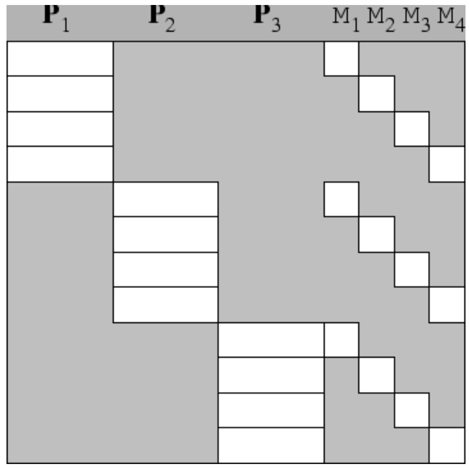

Figure 2: A Jacobi-mátrix struktúrája az objektum-rekonstrukciós feladatnál.

Ezek alapján már könnyen számíthatjuk a paraméterek változását:

$$\Delta P = (U - XV^{-1}X^T)^{-1}(\epsilon_m - XV^{-1}\epsilon_s), \tag{3}$$

$$\Delta R = V^{-1}(\epsilon_s - X^T \Delta P). \tag{4}$$

ahol Δs a struktúraparamétereket, Δm a mozgásparaméterbõl elõállított vektorok, ϵ_s és ϵ_m pedig a hozzájuk tartozó becsléshiba.