

OPTIKAI ALAPISMERETEK

HAJDER LEVENTE

1. BEVEZETÉS

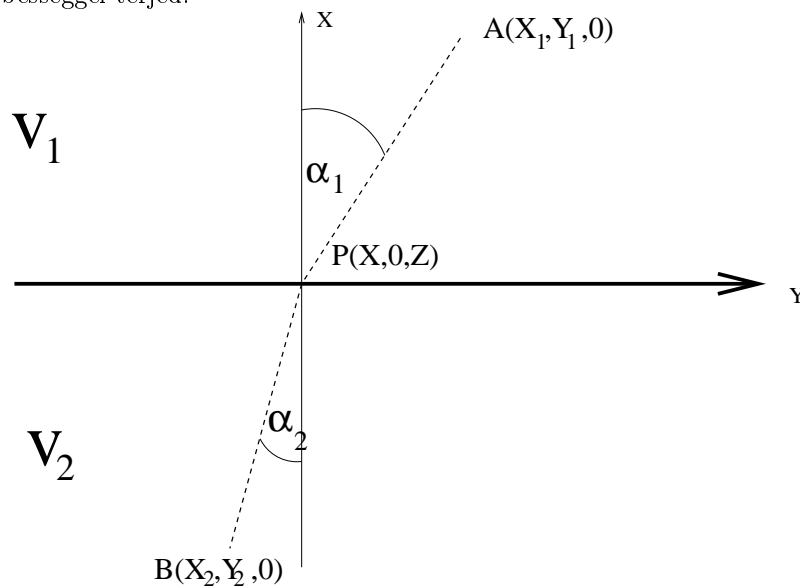
Az optika a fény mint elektromos hullám különböző közegekben való terjedésével, és különböző fényhullámok kölcsönhatásaival foglalkozik. Ebben a rövid jegyzetben a képkalkotáshoz szükséges optikai elemeket ismertetjük, melyeket az alábbiakban foglalhatunk össze:

- (1) Gömbtükrök
- (2) Vékonylencsék
- (3) Vastaglencsék

2. FERMAT-ELV

A jegyzet nagy részében geometria optikát fogunk feltételezni, amely a Fermat-elvre épül. Ez kimondja, hogy a fény egy tetszőleges A pontból úgy jut el egy másik B pontba, hogy megkeresi végtelen sok lehetőségből azt az utat (speciális esetben azokat az utakat), amelyik pontban (pontokban) a terjedési idő változása nulla.

2.1. Fénytörés. Ennek az elvnek segítségével tudjuk például meghatározni a közeghatáron átmenő fény törésének összefüggését: adott két közeg, melyben a fény v_1 és v_2 sebességgel terjed:



Date: 2007.10.01.

Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy A és B pontok a $z = 0$ síkon vannak, a közeghatár pedig az $y = 0$ síkra esik.

Ennek megfelelően a két pontot az $A = [X_1, Y_1, 0]$ és $B = [X_2, Y_2, 0]$ koordinátákkal jelöljük, míg a közeghatáron a $P = [X, 0, Z]$ ponton megy át a fénysugár.

A Fermat-elv alapján keressük azt az X és Z koordinátát, amely mentén a terjedési idő változása zérus lesz.

A terjedési idő felírható:

$$t = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2}$$

A Fermat elv alapján a megoldás ott lesz, ahol igaz, hogy

$$\frac{\partial t}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial Z} = 0$$

Tudjuk, hogy $\overline{AP} = \sqrt{(X_1 - X)^2 + Z^2}$ és $\overline{PB} = \sqrt{(X - X_2)^2 + Z^2}$. Ezért felírhatjuk t parciális deriváltját X szerint a következőképpen:

$$\frac{\partial t}{\partial X} = -\frac{(X_1 - X)}{v_1 \overline{AP}} + \frac{(X - X_2)}{v_2 \overline{PB}} = 0$$

Mivel $\frac{X_1 - X}{\overline{AP}} = \sin \alpha_1$ és $\frac{X - X_2}{\overline{PB}} = \sin \alpha_2$, ezért a fenti összefüggésből a híres Snellius-Descartes törvény adódik, miszerint:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

Vagy bevezetve az $n = \frac{c}{v}$ ún. fénytörés fogalmát írhatjuk, hogy

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

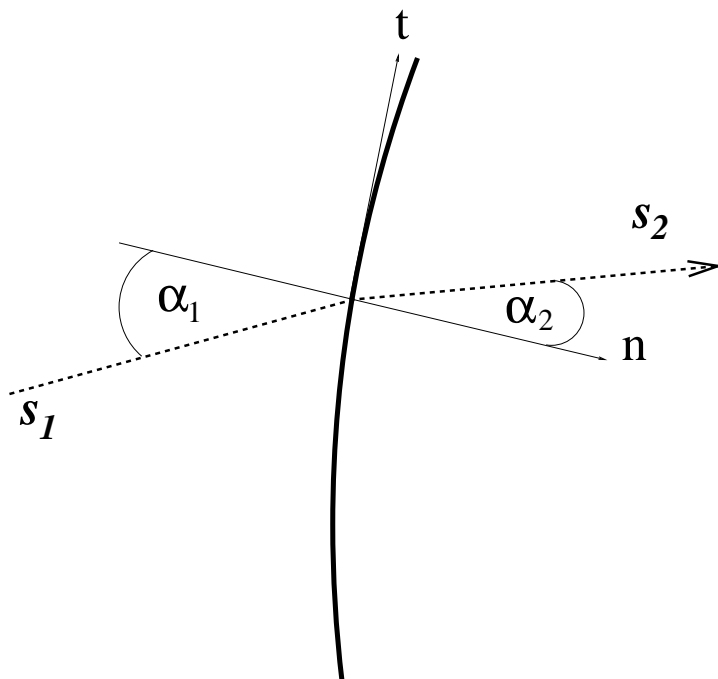
Adósak maradunk még a közeghatár harmadik koordinátájával. Ezt a második parciális derivált zérushelyéből határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial t}{\partial Z} = \frac{Z}{v_1 \overline{AP}} + \frac{Z}{v_2 \overline{PB}} = 0$$

Ez pedig csak a $Z = 0$ esetben lehetséges.

Tehát kijelenthetjük, hogy a Fermat-elv alapján két különböző közegben lévő pont között a fénysugár azt az utat választja, amelyik teljesíti egyrészt a Snellius-Descartes törvényt, másrészt abban a síkban halad a sugár van, amelyet a két pont közeghatárra eső vetületei határoznak meg.

A későbbiek számára hasznos, ha a fénytörést vektoros alakban is felírjuk. Ehhez tekintsük az alábbi ábrát (a közeghatár itt egy gömb próbál lenni) :



Az ábrán két vektort vettünk fel: \mathbf{n} jelöli a normálvektort abban a pontban, ahol a fénysugár eléri a határfelületet, \mathbf{t} pedig ugyanabban a pontban a felületnek azt az érintővektorát, amelyik a fénysugár síkjában helyezkedik el. A fénysugarak (egységnyi hosszúságú) irányvektorát a térben jelölje \mathbf{s}_1 és \mathbf{s}_2 . A trigonometria alapján írhatjuk, hogy

$$\mathbf{s}_1 = \cos \alpha_1 \mathbf{n} + \sin \alpha_1 \mathbf{t}$$

Megszorozhatjuk ezt a kifejezést a közeghez tartozó n_1 törésmutatóval:

$$n_1 \mathbf{s}_1 = n_1 \cos \alpha_1 \mathbf{n} + n_1 \sin \alpha_1 \mathbf{t}$$

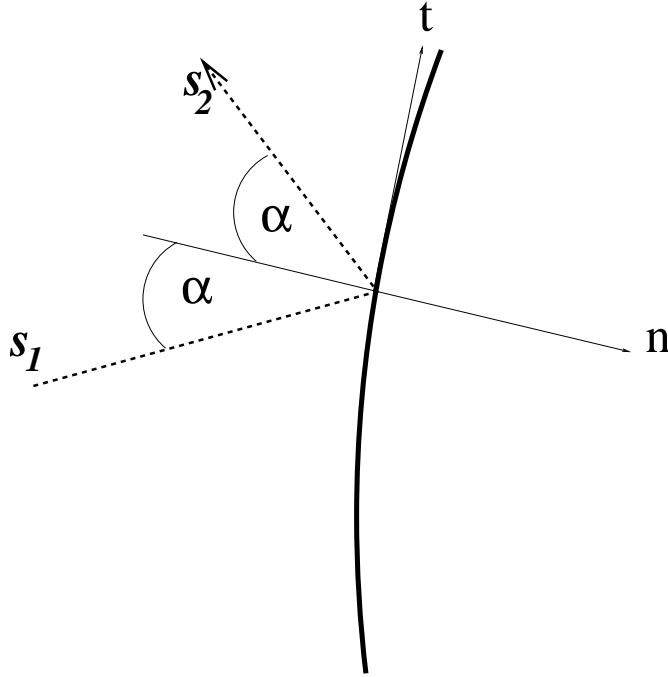
és hasonlóan ehhez, a felület túoldalára felírhatjuk, hogy

$$n_2 \mathbf{s}_2 = n_2 \cos \alpha_2 \mathbf{n} + n_2 \sin \alpha_2 \mathbf{t}.$$

A Snellius-Descartes törvény alapján tudjuk, hogy $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, ezért az összefüggést átírhatjuk:

$$n_2 \mathbf{s}_2 = n_1 \mathbf{s}_1 + (n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1) \mathbf{n}$$

2.2. Visszaverődés. A fénytörésnél egyszerűbben meghatározható a visszaverődés. Amennyiben egy közeghatáron a fény “visszapattan”, két pont között a legrövidebb utat igyekszik a fénysugár megtenni úgy, hogy a határfelületet is érintse. Ez pedig akkor teljesül, ha ugyanakkora szöget zár be a felület normálvektorával a bemenő és a kisugárzott fény:



A szögfüggvények segítségével felírhatjuk, hogy $\mathbf{s}_1 = \cos \alpha \mathbf{n} + \sin \alpha \mathbf{t}$. A visszaverődés miatt a merőleges irányú komponens előjelet vált, azaz $\mathbf{s}_2 = -\cos \alpha \mathbf{n} + \sin \alpha \mathbf{t}$. Ezért írhatjuk, hogy

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 - 2 \cos \alpha \mathbf{n}$$

3. FÉNYSUGARAK VISELKEDÉSE GÖMBFELÜLETEKEN

Amikor a mérnökök kamerákat terveznek, a legfontosabb céljuk, hogy a valós világ tárgyairól egy kétdimenziós lenyomatot készítsenek. Ez optikailag azt jelenti, hogy egy háromdimenziós pont által kibocsátott fénysugarakat egy sík adott pontjába szeretnénk leképezni. Ahogyan azt a továbbiakban látni fogjuk, erre a feladatra gömblencsét szakás alkalmazni.

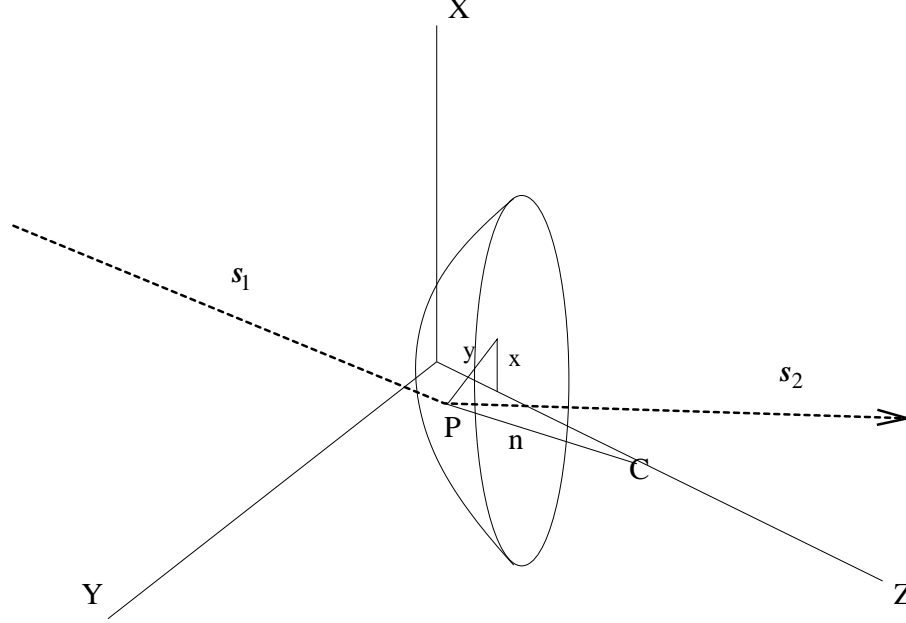
Bár geometriailag a gömbfelületnél jobbat lehet találni (magasabbfokú felületek), de ezeket az elemeket csak nagyon nagy költségekkel képesek legyártani. A kritikus pont a precizitás, ami a magas költséget okozza. Mivel a látható fény hullámhossza pár száz nanométer, optikai megfontolások miatt a felület precizitásának 100 nm körül kell lennie. Bonyolult felületek esetén ez nehezen kivitelezhető. Gömbfelületet ellenben csiszolós technikával nagyon egyszerűen lehet készíteni, szigorú pontossági kritérium esetén is.

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a fénysugár gömbfelületeken. Konkrétan két esetet nézünk meg: mi történik, ha egy sugár gömbtükrön, illetve gömbfelületekekből képződő lencséken halad át.

3.1. Fénysugár viselkedése gömbtükrön és gömb alakú közeghatáron.

3.1.1. *Fénysugarak viselkedése általános esetben.* Tekintsük az alábbi ábrát, ahol az \mathbf{s}_1 irányvektorral rendelkező fénysugár találkozik a C középponttal és R sugárral

jellemzett gömbfelülettel (Az ábrán fénytörés látható, némi fantáziával a visszaverődést is el tudjuk képzelni.):



A fénysugár a felülettel a P pontban találkozik. Ennek a pontnak a koordinátáját kell először meghatároznunk. A koordináta-rendszert vegyük úgy fel, hogy a gömb-sugár haladjon át az origón, érintve a $z = 0$ síkot, a gömb középpontja pedig legyen $C = [0, 0, R]^T$. (Egy apró megjegyzés: a gömb sugarát negatívnak is feltételezhetjük, ebben az esetben a másik oldalon található a kör középpontja. Optikailag ez azt jelenti, hogy nem domború, hanem homorú felületről van szó.)

Ekkor P pontot így írhatjuk fel:

$$P = \left[x, y, R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right]^T$$

Az ábrán \mathbf{n} -nel jelölt normálvektort pedig ki lehet fejezni P és C segítségével: $\mathbf{n} = \frac{C-P}{|C-P|}$. Mivel $|C - P| = R$, mindez koordinátákkal kifejezve így írható fel:

$$\mathbf{n} = \left[-\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right]^T$$

A korábbiakban láttuk, hogy fénytörés esetén $n_2 \mathbf{s}_2 = n_1 \mathbf{s}_1 + (n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1) \mathbf{n}$. Amennyiben a fénysugár két irányvektorának koordinátáit elnevezzük $\mathbf{s}_1 = [s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}]^T$ és $\mathbf{s}_2 = [s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}]$ alapján, az összefüggést felírhatjuk a következőképpen:

$$\begin{aligned} n_2 s_{2x} &= n_1 s_{1x} + \frac{n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1}{R} x \\ n_2 s_{2y} &= n_1 s_{1y} + \frac{n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1}{R} y \\ n_2 s_{2z} &= n_1 s_{1z} + \frac{n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Ugyanezt meg lehet csinálni fényvisszaverődésre is, ekkor az $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 - 2 \cos \alpha \mathbf{n}$ összefüggésbe kell a koordinátákat behelyettesíteni:

$$\begin{aligned} s_{2x} &= s_{1x} + \frac{2 \cos \alpha}{R} x \\ s_{2y} &= s_{1y} + \frac{2 \cos \alpha}{R} y \\ s_{2z} &= s_{1z} + \frac{2 \cos \alpha}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Az optikai rendszerek vizsgálatának szempontjából még a “sima” terjedés is fontos szerepet tölt be. Ha egy közegben a belépő fénysugár $\mathbf{s}_1 = [s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}]^T$ irányvektor mentén halad, az $\mathbf{x}_1 = [x_{1x}, x_{1y}, x_{1z}]^T$ pontból az $\mathbf{x}_2 = [x_{2x}, x_{2y}, x_{2z}]^T$ pontba jut el a fény, ha igaz, hogy:

$$x_{2x} = R_{12} s_{1x}$$

$$x_{2y} = R_{12} s_{1y}$$

$$x_{2z} = R_{12} s_{1z}$$

amennyiben $R_{12} = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}$ a két pont távolsága.

3.1.2. Paraxiális közelítés. Ezzel tulajdonképpen levezettük a törés és a visszaverődés egyenleteit. Amennyiben egy megadott pontból, megadott irányvektor mentén haladó fénysugarat szeretnénk követni, a fenti összefüggések és némi geometriai ismeret (a sugár/felületek metszéspontjának meghatározásához) segítségével követni tudjuk az egyes pontokat.

A fenti összefüggésnek azonban van egy egyszerűsítése, amelynek segítségével lineáris problémává tudjuk az egyébként sokkal komplikáltabb problémát transzformálni. Ehhez elsőrendű közelítést kell alkalmazni.

Tudjuk, hogy kis szögek esetén igaz, hogy $\sin \alpha = \alpha$, természetesen a szöget radiánban kell megadni. Snellius-Descartes törvénye ekkor egyszerűsödik:

$$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$$

Kis szögek esetén az is igaz, hogy $\cos \alpha \approx 1$. A fenti, fénytörést leíró egyenletek mindezek hatására így módosulnak:

$$\begin{aligned} n_2 s_{2x} &= n_1 s_{1x} + \frac{n_2 - n_1}{R} x \\ n_2 s_{2y} &= n_1 s_{1y} + \frac{n_2 - n_1}{R} y \\ n_2 s_{2z} &= n_1 s_{1z} + \frac{n_2 - n_1}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

A tükröződést összefüggéseit hasonlóan egyszerűsíthetjük:

$$\begin{aligned} s_{2x} &= s_{1x} + \frac{2}{R} x \\ s_{2y} &= s_{1y} + \frac{2}{R} y \end{aligned}$$

$$s_{2z} = s_{1z} + \frac{2}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Az azonos közegben való terjedést is módosíthatjuk. Ebben az esetben így írhatjuk át a korábban leírt összefüggéseket:

$$x_{2x} = x_{1x} + D_{12}s_{1x}$$

$$x_{2y} = x_{1y} + D_{12}s_{1y}$$

$$x_{2z} = x_{1z} + D_{12}$$

ahol $D_{12} = x_{2z} - x_{1z}$. Mindez akkor igaz, ha $(x_{2x} - x_{1x}) \ll (x_{2z} - x_{1z})$ és $(x_{2y} - x_{1y}) \ll (x_{2z} - x_{1z})$, azaz ha a fénysugár nagyon közel van az optikai tengelyhez. Paraxiális közelítés esetén ezt nyugodtan feltehetjük.

Nagyon fontos megjegyzés: az ábrákon a fénysugár szemszögéből nézve homorú felületekkel dolgozunk. Ha ugyanolyan sugarú, de homorú felületekkel dolgozunk, akkor a felület normálvektora megváltozik: az első két koordináta előjelet vált, a harmadik koordináta azonban nem változik. Ez a törés és a visszeverődés szempontjából nagyon hasznos, hiszen a paraxiális összefüggésekben (is) az R sugártól a terjedési irányvektornak csak ez első két koordinátája függ. Ha homorú felületnél negatívnak képzeljük el a sugarat, akkor az összefüggések egy az egyben igazak maradnak. Ezt ki is fogjuk használni a későbbiekben.

3.1.3. Szabad terjedés + közeghatár. Az optikai rendszereket az alapvető optikai elemek, azaz a felülethatárok és a tükrök összeállításával készítik. Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan kell egy képet elhelyezni, hogy valódi leképzést valósítsunk meg.

Elsőként a gömbfelületet vizsgáljuk meg: adott tehát egy fénysugár, amely az $\mathbf{x}_1 = [x_{1x}, x_{1y}, x_{1z}]^T$ pontból indul $\mathbf{s}_1 = [s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}]^T$ irányban. Először D_{12} távolságra megy az n_1 törésmutatóval rendelkező közegen a fénysugár, ahol törőfelülettel találkozik, és értelemszerűen megtörik a felületen.

Majd újabb közegen halad át, aminek n_2 a törésmutatója.

Az első felületen átmegy a hullám, és megérkezik az $\mathbf{x}_2 = [x_{2x}, x_{2y}, x_{2z}]^T$ ponthoz, ahol az új koordinátákat így lehet felírni:

$$x_{2x} = x_{1x} + D_{12}s_{1x}$$

$$x_{2y} = x_{1y} + D_{12}s_{1y}$$

$$x_{2z} = x_{1z} + D_{12}$$

Ezek után megtörik, és az irányvektorok így változnak meg:

$$s_{2x} = \frac{n_1}{n_2} s_{1x} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} x_{2x}$$

$$s_{2y} = \frac{n_1}{n_2} s_{1y} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} x_{2y}$$

$$s_{2z} = \frac{n_1}{n_2} s_{1z} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} \sqrt{R^2 - x_{2x}^2 - x_{2y}^2}$$

Végül az $\mathbf{x}_2 = [x_{2x}, x_{2y}, x_{2z}]^T$ pontba érkezik a fénysugár, ha ez a pont D_{23} távolságra van a közeghatártól:

$$x_{3x} = x_{2x} + D_{23}s_{2x}$$

$$x_{3y} = x_{2y} + D_{23}s_{2y}$$

$$x_{3z} = x_{2z} + D_{23}$$

A teljes folyamatot az első felülettől a harmadikig összefoglalható három sorban:

$$x_{3x} = \left(1 - D_{23} \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}\right) x_{1x} + \left(D_{12} + D_{23} \frac{n_1}{n_2} - D_{12} D_{23} \frac{n_2 - n_1}{R n_2}\right) s_{1x}$$

$$x_{3y} = \left(1 - D_{23} \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}\right) x_{1y} + \left(D_{12} + D_{23} \frac{n_1}{n_2} - D_{12} D_{23} \frac{n_2 - n_1}{R n_2}\right) s_{1y}$$

$$x_{3z} = x_{2z} + D_{12} + D_{23}$$

Jól látszik, hogy az első két sor, azaz az x_{3x} és x_{3y} teljesen független egymástól. Ez nem is meglepő, hiszen a fénytérjedésben csak a harmadik tengely kitüntetett, az első kettő egyenrangú egymással.

Miután levezettük az összefüggéseket, tekintsük át a leképezés problémáját. Adott a háromdimenziós térünk, amelyről fényképet szeretnénk készíteni. Ez azt jelenti, hogy azt szeretnénk, ha a tér egy adott pontjából kiinduló összes fénysugár egy megadott pontba érkezzon. A fenti összefüggésre úgy lehet ezt lefordítani, hogy a kiinduló fény irányvektorától független legyen a beérkezés helye. Tehát az s_{1x} együtthatójának nullának kell lennie (és s_{1y} együtthatójának is, de az ugyanabban az esetben teljesül):

$$D_{12} + D_{23} \frac{n_1}{n_2} - D_{12} D_{23} \frac{n_2 - n_1}{R n_2} = 0$$

Átalakítva a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{n_2}{D_{23}} + \frac{n_1}{D_{12}} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Azaz, ha a képet a gömb alakú törőfelülettől D_{12} távolságra helyezzük, a képet D_{23} távolságra kapjuk meg, ha teljesítik a fenti összefüggést.

3.2. Lencsék optikai működése. Ismételjük át a visszeverődést a korábbiak alapján. Az összefüggések a felületre alkalmazva:

$$s_{2x} = s_{1x} + \frac{2}{R} x_{2x}$$

$$s_{2y} = s_{1y} + \frac{2}{R} x_{2y}$$

$$s_{2z} = s_{1z} + \frac{2}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Mindez összevonva:

$$x_{3x} = \left(1 + 2\frac{D_{23}}{R}\right)x_{1x} + \left(D_{12} + D_{23} + 2\frac{D_{12}D_{23}}{R}\right)s_{1x}$$

$$x_{3y} = \left(1 + 2\frac{D_{23}}{R}\right)x_{1y} + \left(D_{12} + D_{23} + 2\frac{D_{12}D_{23}}{R}\right)s_{1y}$$

A leképezés akkor teljesül, ha

$$D_{12} + D_{23} + 2\frac{D_{12}D_{23}}{R} = 0$$

Ez átalakítva kapjuk a leképezést szemléletesen leíró összefüggést:

$$\frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{23}} = -\frac{2}{R}$$

Jól látszik, hogy a jobb oldalon negatív érték szerepel. Ez azt jelenti, hogy ha D_{12} pozitív értéket vesz fel, D_{23} negatív lesz. Ez nem meglepő, hiszen tükröződésről van szó.

3.3. Mátrixos formalizmus. Most már ismerjük a lencsék leképező képességét. Érdekes még egy aspektusból megvizsgálni a fényterjedést, annak érdekében, hogy több lencsén keresztül meg tudjuk vizsgálni az áthaladást. Ehhez meg kell ismernünk a mátrixos formalizmust.

Adott tehát egy képpontból kiinduló sugár, ameltre pl. törés esetén a már korábban levezetett összefüggést alkalmazhatjuk:

$$n_2 s_{2x} = n_1 s_{1x} + \frac{n_2 - n_1}{R} x_{1x}$$

és

$$x_{2x} = x_{1x}$$

Mivel a fény haladási irányára merőleges irányok egyenrangúak, most csak az x tengely irányát vizsgáljuk, az y tengelyre vonatkozó összefüggések értelemszerűen teljesen hasonlóan írhatóak fel.

Mátrix alakban a törést így írhatjuk, bevezetve az $u_i = [n_i s_{ix}, x]_i^T$ és $v_i = [n_i s_{iy}, y]_i^T$ vektort:

$$u_2 = \begin{bmatrix} n_2 s_{1x} \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_2 - n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 s_{1x} \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_2 - n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_1$$

Az egyszerűség kedvéért szokás a $\frac{n_2 - n_1}{R}$ hányadost P -vel jelölni.

Tükröződés esetén az összefüggés így néz ki:

$$s_{2x} = s_{1x} + \frac{2}{R} x_{2x}$$

Beszorozva n -nel:

$$n s_{2x} = n s_{1x} + \frac{2n}{R} x_{2x}$$

Mindez mátrixos alakban is felírható:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_1$$

Egyszerű, akadálymentes fényterjedés összefüggése :

$$x_{2x} = D_{12}s_{1x} + x_{1x}$$

Mátrixos alakban:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_{12}}{n_1} & 1 \end{bmatrix} u_1$$

A fényterjedést tehát leírhatjuk mátrixos alakban. Az is nyilvánvaló, hogy több közeghatár/törőfelület/terjedő közeg vizsgálatát is meg tudjuk ejteni, hiszen a mátrixszorzásnak megfelelően a fényutakat leíró mátrixokat össze kell szorozni, és máris megkaptuk a fénysugár terjedése sok-sok közegen át. Ennek segítségével most vizsgáljuk meg valódi lencsék viselkedését!

Megjegyzés: a törés esetén a $\begin{bmatrix} 1 & \frac{n_2-n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot szokás a $\beta = \frac{n_2-n_1}{R}$ ún

törőerő jelöléssel egyszerűbb alakban is írhatjuk: $\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Megjegyzés: az összes mátrix determinánusa 1, ezért szorzatuk determinánusa is 1.

3.3.1. *Általános paraxiális leképező rendszer.* Az általános leképezés egy 2×2 -es mátrix segítségével elvégezhető:

$$T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

feltéve, hogy $\det(T) = 1$, hiszen minden leképezésnek egy a determinánusa. Ha azt szeretnénk, hogy leképezést valósítsunk meg, akkor a kiinduló sugár szögétől függetlennek kell lennie a beérkezés helyének. Ez akkor valósul meg, ha $M_{21} = 0$. Ebben az esetben a determináns összefüggése miatt az is igaz, hogy $M_{11} = 1/M_{22}$.

3.3.2. *Vastag lencse.* Lencsék alatt egy üvegdarabot kell érteni, amelyik két gömbfelületből jön létre. Az általános felépítésű lencse, melyet vastag lencsének is szokás hívni, két törőfelületet tartalmaz, az egyikén a levegőből az üvegfelületre törik a fény, majd az üvegből vissza. A két felület között is – a lencse vastagságának megfelelően – halad a fénysugár. A körülvevő közeg törésmutatóját n_1 -gyel, az üvegét n_2 -vel jelöljük. A teljes optikai rendszer tehát a következő 5 összetevőből állítható össze, mely 5 mátrix segítségével írható le:

(1) Eljut a levegőben a tárgyról első lencsefelületig:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_t}{n_1} & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Megtörik a lencsén

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{n_2-n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) A lencsében eljut a második felületig

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_l}{n_2} & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Megtörik újra, és kijut újra a levegőre

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) Eljut a képig a fénysugár

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_k}{n_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Ahol D_l a lencse vastagságát jelöli, D_k és D_t pedig a kép, illetve a tárgy távolságát.

Először is vizsgáljuk meg a 2-4 szakaszokat. A fényterjedést a három megfelelő mátrix szorzata adja meg:

$$T_{vastag} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_l}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \beta_1 \frac{D_l}{n_1} & \beta_1 - \beta_2 - \frac{D_l}{n_2} \beta_1 \beta_2 \\ \frac{D_l}{n_1} & 1 + \beta_1 \frac{D_l}{n_1} \end{bmatrix}$$

3.3.3. Vékony lencse. A vékony lencsét azért nevezik vékonynak, mert a két gömbfelület közötti rész olyan vékony, hogy szinte nullának tekinthető. Ebben az esetben a transzformáció (2-4. lépésekben):

$$T_{vakony} = \begin{bmatrix} 1 & |\beta_1 - \beta_2| \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mindez átfordítva irányvektorokra és pozíciókra kapjuk, hogy

$$n_1 s_2 = n_2 s_2 + (\beta_1 - \beta_2)x$$

$$x_2 = x_1$$

Az utóbbi összefüggés (miszerint a pontok x koordinátái megegyeznek) nem meglepő: a lencse annyira vékony, hogy nincs ideje a fénysugárnak haladni. vastag lencsénél ez az összefüggés nem áll fenn természetesen. Azonban vastag lencse esetén is megmutatható, hogy ebben az esetben is létre tudunk hozni olyan (hipotetikus) képsíkokat, amelyek között egységnyi a nagyítás. Ezt a következőkben vizsgáljuk meg:

3.4. Konjugált síkok. Először vezessük be a konjugált síkok fogalmát. Konjugált síkoknak nevezzük azokat a képsík-tárgysík párosokat, amelyek esetében minden egyes tárgysíktól kiinduló összes sugár a képsík egy pontjába érkezik.

Legyen adott egy tetszőleges számú projektív rendszer, amelyet 2×2 -es, 1 determinánsú mátrixszal írhatunk le:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = 1, \text{ ezért } M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1.$$

Jelöljük a tárgysík egy p_1 pontjáról kiinduló sugarat: $p_1 = \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$ és a képsík megfelelő pontját a leképezés után $p_2 = \begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Tudjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy a p_1 pontnak megfelelő x_1 koordinátáról induló összes sugár beérkezzen a képen az x_2 koordinátára, attól függetlenül, hogy milyen szögben indul ki a sugár, az M_{21} együttthatónak nullának kell lennie. Ebben az esetben a determináns kritériuma miatt igaz, hogy

$$M_{11}M_{22} = 1$$

Tehát a leképezést így írhatjuk le:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & \frac{1}{M_{11}} \end{bmatrix}$$

3.5. Fősíkok. Még érdekesebb összefüggést kapunk, ha megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan síkpár, amely úgy viszi át a fénysugarakat, mintha vékony lencse lenne. Megint vegyünk egy tetszőleges leképező rendszert:

Ehhez tegyünk hozzá egy eltolást a lencse elé és a lencse után:

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Továbbra is igaz, hogy $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0$.

A beszorzásokat elvégezve:

$$M' = \begin{bmatrix} M_{11} + M_{12}\frac{D_2}{n_2} & M_{12} \\ M_{21} + \frac{D_2}{n_2}M_{11} + \frac{D_1}{n_1}M_{22} + \frac{D_1D_2}{n_1n_2}M_{12} & M_{22} + M_{12}\frac{D_1}{n_1} \end{bmatrix}$$

Ha a vékony lencséhez hasonló átvitelt $\left(\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ szeretnénk biztosítani, igaznak kell lennie a megfelelő elemekre az alábbi összefüggéseknek:

$$M_{11} + M_{12}\frac{D_2}{n_2} = 1$$

$$M_{22} + M_{12}\frac{D_1}{n_1} = 1$$

És ebből már adódik, hogy

$$D_2 = \frac{n_2}{M_{12}}(1 - M_{11})$$

$$D_1 = \frac{n_1}{M_{12}}(1 - M_{22})$$

Ha ez igaz, behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a bal alsó elem akkor lesz nulla, azaz ha

$$M_{21} + \frac{D_2}{n_2} M_{11} + \frac{D_1}{n_1} M_{22} + \frac{D_1 D_2}{n_1 n_2} M_{12} = 0$$

Ebból fejezzük ki az M_{12} -t:

$$M_{12} = -\frac{n_1 n_2}{D_1 D_2} \left(M_{21} + \frac{D_2}{n_2} M_{11} + \frac{D_1}{n_1} M_{22} \right)$$

Az M_{12} elem az eredő mátrix bal felső eleme, ezért az optikai rendszer törőere.

Mindebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az M_{11} , M_{12} , M_{21} és M_{22} paraméterekkel leírható optikai rendszerben találunk olyan két síkot, amelyek pontosan úgy viselkedik, mint egy vékony lencse. Ennek segítségével le tudunk írni egy tetszőleges optikai rendszert.

4. PROJEKTÍV RENDSZEREK FELÉPÍTÉSE

Ahogy már beláttuk, a gömlencséből (és -tükrökből) készített optikai rendszerben található olyan síkot, amelynél ugyanúgy viselkedik, mint egy vékony lencse. Tehát az alábbi mátrixszal írható le az optikai rendszer:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg azt a két síkot, amelyek egymásnak konjugáltjai, azaz a tárgysík minden egyes pontjából induló összes sugár a kép egy pontjába érkezik. Írjuk fel az eredő mátrixot:

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_k}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_t}{n_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta \frac{D_k}{n_2} & -\beta \\ \frac{D_t}{n_1} + \frac{D_k}{n_2} - \beta \frac{D_k D_t}{n_1 n_2} & | 1 - \beta \frac{D_t}{n_1} \end{bmatrix}$$

Ez pedig akkor lesz leképező rendszer, ha a mátrix bal alsó elem zérus:

$$\frac{D_t}{n_1} + \frac{D_k}{n_2} - \beta \frac{D_k D_t}{n_1 n_2} = 0$$

Ez pedig az alábbi lépéseken keresztül alakítható át (először $D_t D_k$ -val osztunk, majd pedig $n_1 n_2$ -vel szorzunk):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_2 D_t} + \frac{1}{n_1 D_k} &= \beta \frac{1}{n_1 n_2} \\ \frac{n_1}{D_t} + \frac{n_2}{D_k} &= \beta \end{aligned}$$

Ez a lencsetervezés egy fontos egyenlete: a törőerő és a két törésmutató segítségével írja le, hogy hova kell a tárgyat, illetve a képsíkot tenni ahhoz, hogy leképezés valósuljon meg.

Fontos észrevétel, hogy abban az esetben, ha a végtelenben van a tárgy, az egyenlet szerint ($D_t = \infty$ helyettesítéssel a megfelelő tört eltűnik):

$$D_k = \frac{n_2}{\beta}$$

illetve $D_k = \infty$ helyettesítéssel:

$$D_t = \frac{n_1}{\beta}$$

Az $\frac{n_1}{\beta}$ és $\frac{n_2}{\beta}$ törteket szokás a tárgy- illetve képoldali fókusz távolságnak hívni, és f -fel jelölni: $f_t = \frac{n_1}{\beta}$ és $f_k = \frac{n_2}{\beta}$. A végtelenben levő pontok (magasságtól függetlenül) átmennek a fókuszponton. Ezt a állítás be kell látnunk: ehhez vegyük elő ismét a mátrixos formalizmus segítségével felírt leképezést:

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_k}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_t}{n_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta \frac{D_t}{n_1} & -\beta \\ \frac{D_k}{n_2} + \frac{D_t}{n_1} - \beta \frac{D_k D_t}{n_1 n_2} & 1 - \beta \frac{D_k}{n_2} \end{bmatrix}$$

Azt már tudjuk, hogy a bal alsó elem zérus. Ahhoz, hogy a végtelenből érkező pontok a fókuszpontba fussanak, szükséges, hogy a jobb alsó elem is zérus legyen:

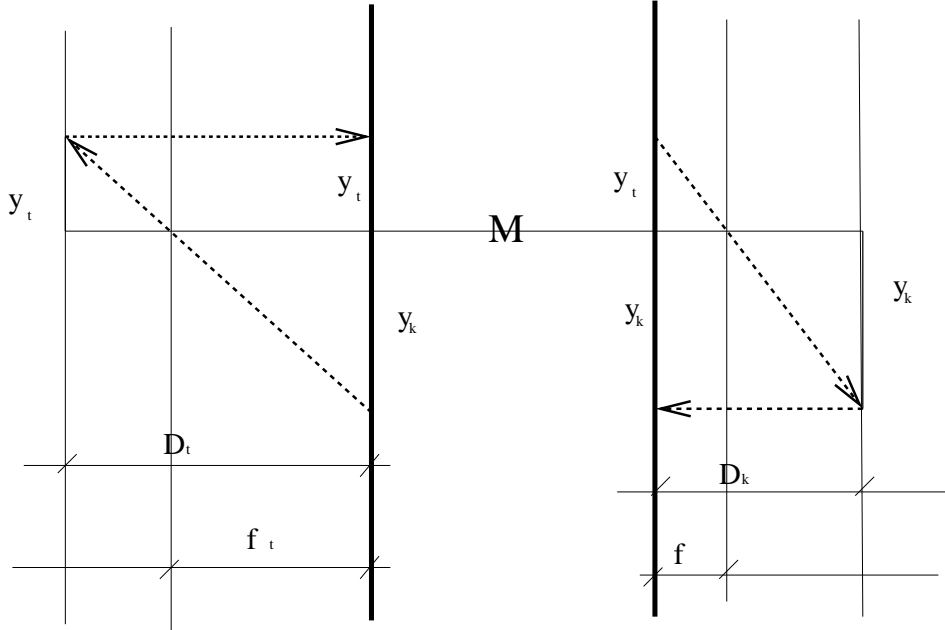
$$1 - \beta \frac{D_k}{n_2} = 0$$

Ez pedig akkor teljesül, ha

$$D_k = \frac{n_2}{\beta} = f_k$$

Ezzel visszakaptuk a fókusz távolság definícióját, azaz a fókuszpontba valóban a végtelenből jövő sugár befut.

A végtelenből érkező sugarak párhuzamosak az optikai tengellyel. A végtelenből érkező sugarak megrajzolásával tetszőleges tárgysík leképezését meg tudjuk rajzolni:



A fenti ábrából (hasonló háromszögek alapján) az alábbi aránypárt tudjuk felállítani:

$$\frac{D_t - f_t}{y_t} = \frac{f_t}{y_k}$$

Mivel $D_k \gg f_k$, írhatjuk:

$$\frac{D_t}{y_t} = \frac{f_t}{y_k}$$

Ebből pedig kifejezhetjük a képmagasságot:

$$y_k = \frac{f_t}{D_t} y_t$$

Ez pedig a projekció alapegyenlete. Egy egyszerű arányosságot ír fel a leképzésre. Ez az összefüggés leírja paraxiális közelítésben a projekciót.

5. A PROJEKTÍV LEKÉPZÉST ZAVARÓ ABERRÁCIÓK

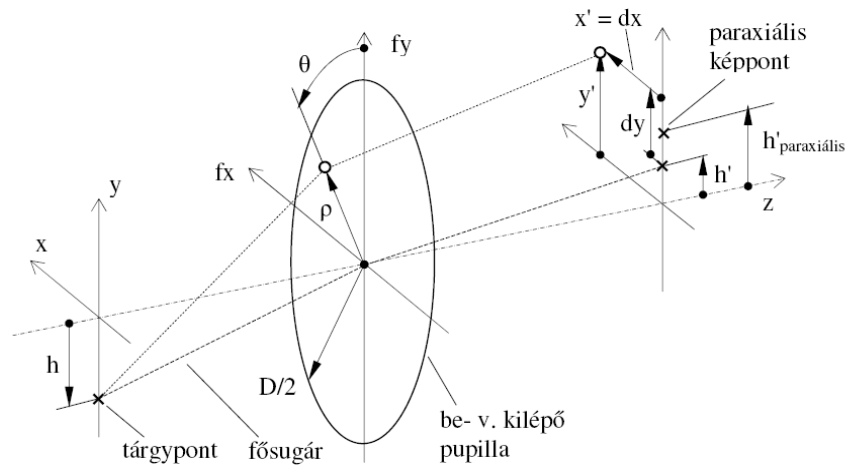
5.1. Geometria aberrációk. Az előző fejezetben megmutattuk, hogy paraxiális közelítés esetén projektív leképezést kapunk, ha gömfelületekből rakunk össze optikai rendszereket. A paraxiális közelítés azt jelentette, hogy a gömbök sugara nagy, és a tárgy messze van az optikai leképző rendszertől. Ebben az esetben azt mondtuk, hogy a $\sin \alpha = \alpha$ közelítés jól alkalmazható.

Ahogy az várható, ez a közelítés sok esetben nem elegendő. A közelítéstől való eltérést nevezik a projektív rendszer aberrációjának. Az aberrációkat általában valós sugárvezetéssel (ray-tracing) szokták megvizsgálni a megfelelő szoftverek segítségével, hiszen a gyártási hibából eredő aberrációktól eltekintve meg tudjuk a megtervezett rendszerünket vizsgálni.

Ettől függetlenül analitikusan is meg szokás az aberrációkat vizsgálni. Ehhez harmadrendű közelítést szokás alkalmazni, azaz a szinusz függvény sorfejtéséből az első és a második tagot veszik elő:

$$\sin \alpha = x - \frac{x^3}{3!}$$

Itt a megfelelő egyenleteket levezetés nélkül közöljük.



Így kapjuk az ún. Coddington-Taylor egyenleteket:

$$y' = A_1 \rho \cos \theta + A_2 h + B_1 \rho^3 \cos \theta + B_2 \rho^2 h (2 + \cos 2\theta) + (3B_3 + B_4) \rho h^2 \cos \theta + B_5 h^3 + \dots$$

$$x' = A_1 \rho \sin \theta + B_1 \rho^3 \sin \theta + B_2 \rho^2 h \sin 2\theta + (B_3 + B_4) \rho h^2 \sin \theta + \dots$$

A_1 : defókusz

A_2 : nagyítás

B_1 : nyíláshiba (szférikus aberráció)

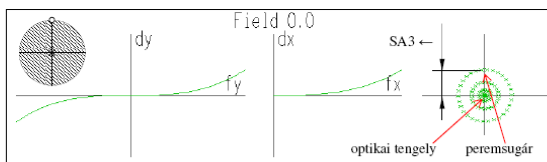
B_2 : kóma

B_3 : asztigmatizmus

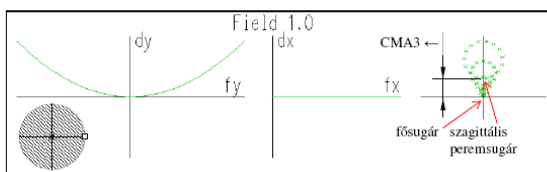
B_4 : Petzvál-féle képmezőhajlás

B_5 : torzítás

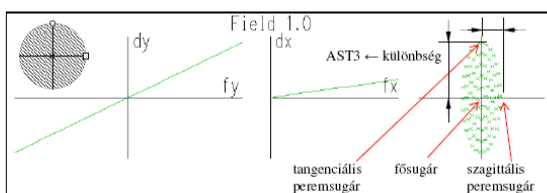
A torzítások különböző foltokat alkotnak a képsíkon. Az egyes foltok jellegzetes alakjait az alábbi ábrán látszik:



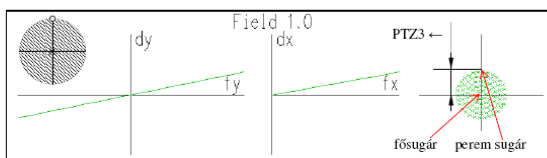
Nyíláshiba hibagörbéje és szóródási foltja, $h = 0$.



Kóma hibagörbéje és szóródási foltja, $h \neq 0$.



Asztigmatizmus hibagörbéje és szóródási foltja, $h \neq 0$.



Petzvál-képző hajlás hibagörbéje és szóródási foltja (ua. mint defókuszt), $h \neq 0$.

5.2. Kromatikus aberráció. A gömbfelületek alakjából eredő aberrációkon túl az egyik legfontosabb aberráció a kromatikus aberráció. Eddig azt feltételeztük, hogy a fény színe (azaz a frekvenciája) nem befolyásolja a fény terjedését. Ez a valóságban nem igaz: sajnos a törésmutató kis mértékben függ a sugár frekvenciától. Ezt nem is lehet kiküszöbölni, annyit lehet csinálni, hogy a szétfutó sugarakat párhuzamosá tesszük.

5.3. Fényelhajlás (diffrakció). A geometriai optikában a fény homogén közegben sugárként képzelhető el. A valóságban ez nem így van, a fény képes elhajlani. Tipikus eset a résen való áthaladás. A fényelhajlás fényképezőgépek és kamerák esetén is fellép, konkrétan a rekesz alkot egy rést, amelyiken elhajlik a fény.