Projektív geometria

2007.

2008. december 8.

1. Bevezetés

A Tomasi-Kanade faktorizáció eredeti megoldása merőleges vetítés alkalmazásával készült. Paraperspektív és gyenge perspektív esetre hamarosan kidolgoztak módszereket. Néhány évvel később Bill Triggsz készítette el azt a módszert, amely valódi perspektíva esetén is sikerrel képes előállítani képsorozatokból a felvételen szereplő objektumok jellegzetes pontjainak háromdimnenziós modelljét.

2. Homogén koordináták

A feladat megoldása érdekében vezessük be a homogén koordináták fogalmát.

2.1. Pontok leírása homogén koordinátákkal

Valós koordináták esetén (háromdimenziós térben) három koordinátával határozzuk meg egy pont helyét:

$$P = (x, y, z)$$

Homogén koordináták esetén egy negyedik koordinátát is beillesztünk:

$$P = (x, y, z, T)$$

Egy valós pontnak sok homogén pont felel meg úgy. A leképzés úgy történik, hogy az első három koordinátát elosztjuk a negyedik koordinátával:

$$(x, y, z, T) \rightarrow \left(\frac{x}{T}, \frac{y}{T}, \frac{z}{T}\right)$$

Megjegyzés #1: mindez azt is jelenti, hogy ha egy homogén koordinátákkal megadott pont minden egyes elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal, akkor a valódi koordinátákkal leírt pont nem változik meg. Ezt a tulajdonságot a $\sim$operátorral jelezzük.

$$(x, y, z, T) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda T)$$

Megjegyzés #2: A $T=1$érték esetén az első három homogén koordináta a valós koordinátákat adja meg, míg $T=0$ esetében a pont a végtelenben van (de ennek a végtelennek megvan a pontos iránya, azaz végtelen számú végtelenben levő pontot tudunk a homogén koordinátás ábrázolással leírni, azonban fontos megkötés, hogy homogén koordináták esetén a legnagyobb pontnak nullától különbözőnek kell lennie.

Megjegyzés #3: Pontot homogén koordinátákkal leírva nemcsak háromdimenzióban, hanem tetszőleges dimenziószámban is el lehet képzelni. A kétdimenziós esettel ebben a cikkben is fogunk találkozni.

2.2. Egyenesek leírása homogén koordinátákkal

Az egyenes egyenlete valós koordinátákkal: $ax+by+c=0$. Ha behelyettesítjük a homogén koordinátákból visszaállított valós értékeket ($x \to \frac{x}{T}$, $y \to \frac{y}{T}$) akkor az alábbi egyenlettel írhatjuk le az egyeneseket: $ax+by+cT=0$.

2.3. Dualitás

Amennyiben van egy egyenesünk pl. a háromdimenziós térben, az $L=(l_1,l_2,l_{3,}l_4)$vektorral megadott síkra illeszkedik minden olyan $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$pont, amelyikre igaz, hogy:

$$Lx=0$$

Tehát a két vektor merőleges. Vegyük észre, hogy ha a két vektort kicseréljük, akkor az egyenlet igaz marad. Tehát ha az L-lel reprezentált egyenesre illeszkedik az x pont, akkor az is igaz, hogy az x-szel reprezentált egyenesre illeszkedik az Lpont.

Azaz kimondhatjuk a tételt, hogy a projektív geometriában az összes egyenesekre kimondott tétel igaz a pontokra is, és fordítva.

2.4. Két ponttal megadott egyenes egyenlete a kétdimenziós projektív térben

Legyen adott két lineárisan független pont a projektív térben : $M=(x,y,t)^T$ és $N=(u,v,w)^T$. A két pont által meghatározott egyenest írjuk le az $L=(a,b,c)$ vektorral. Mivel M rajta van L-en, írhatjuk, hogy : $ML=0$, vagyis M és L merőlegesek egmásra. Ez pedig csak akkor lehetséges (háromdimenzióban vagyunk!), ha L párhuzamos M és N vektorok vektoriális szorzatára:

$$L \sim M \times N = \begin{pmatrix} yw-tv \\ tu-xw \\ xv-yu \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A vektoriális szorzás leírható mátrix segítségével is:

$$M\times N = \begin{bmatrix} 0 & -t & y \\ t & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = [M]_x N = \begin{bmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = -[N]_x N$$

Megjegyzés: Az előző pont (dualitás) alapján két egyenes által meghatározott pontot teljesen hasonlóan lehet számítani a projektív geometriában.

Megjegyzés: $[M]_x$determinánsa nulla, azaz a vektoriális szorzatot reprezentáló mátrix szinguláris.

2.4.1. Példa: adott két merőleges egyenes, az egyik az $x = a$, a másik $y = b$alakban írható le. Keressük a két egyenes metszéspontját.

Megoldás: Homogén koordinátás alakban a két egyenes így írható le: $x - a = 0$ és $y - b = 0$. Ez a két egyenes a $(1, 0, -a)^T$és a $(0, 1, -b)^T$ vektorokkal jellemezhető a homogén koordinátás térben. A metszéspontot a vektoriális szorzat segítségével számíthatjuk:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát a metszéspont – nem túlzottan meglepő módon – (a, b)-ben van.

2.4.2. Példa: 2D-s párhuzamos egyenesek metszéspontja

Két általános helyzetű, egymással párhuzamos egyenest a következőképpen írhatunk le: $ax + by + c_1 = 0$ és $ax + by + c_2 = 0$. Homogén koordinátákkal a metszéspont kiszámítható:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} bc_2 - bc_1 \\ ac_1 - ac_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha át akarunk térni valós koordinátákra, nehézségbe ütközünk: a metszéspont ugyanis a nullával való osztás miatt a végtelenben van. Ráadásul ez egy olyan végtelen, aminek iránya is van, hiszan az egyes végtelen pontokat meg tudjuk egymástól különböztetni.

Ezen a példán egy érdekes, és első látásra meglepő dolgot vehetünk észre: Azt tudjuk, hogy a végtelenben levő pontokat $(a, b, 0)^T$ alakban írhatjuk fel. Ebből az követketkezik, hogy a végtelenben levő egyenesek rajta vannak a $(0, 0, c)^T$ vertorral leírható egyenesen. Sőt, az is könnyen belátható, hogy mindegyik végtelenben levő pont rajta van ezen az egyenesen. Ezért ezt a végtelenben levő egyenesnek nevezzük, és így jelöljük: $L_\infty = (0, 0, 1)^T$. Még egy összefüggésre felhívnánk a figyelmet: egy tetszőleges (a, b, c)-vel reprezentált egyenes a végtelenben levő egyenest itt metszi (természetesen a metszéspont is a végtelenben van):

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3. Példa: hiperbola és egyenes metszete a 2D-s projektív térben

Vegyünk egy hiperbolát, az egyszerűség kedvéért legyen az $xy = 1$ egyenlettel leírható. Keressük meg azt a pontot, ahol a hiperbola az $x = 3$ egyenest metszi.

Az egyenes egyenlete homogén térben átírható, ha $(u, v, w)^T$-al jelöljük a homogén koordinátás megfelelőjét az $(x, y)^T$ vektornak : $u = 3w$. A hiperboláé pedig: $uv = w^2$, hiszen $u = wx$ és $u = wy$.

A két egyenletből megoldása a $(3w, w/3, w)^T$ homogén koordinátás vektor, ami a $(3, \frac{1}{3})^T$ valós pontnak felel meg.

2.5. Egy ponton átmenő egyenesek, egy egyenesre illeszkedő pontok

Ha adott két egyenes, melyet homogén koordinátákkal l_1-gyel és l_2-vel jelölünk, akkor a metszéspontjuk $p = l_1 \times l_2$ összefüggéssel számítható ki. Ha veszünk egy harmadik egyenest, melynek l_3 a jele, és ez az egyenes szintén átmegy p ponton, akkor igaz, hogy $l_3^T(l_1 \times l_2) = 0$. Ez pedig egyenértékű (beszorzással lehet ellenőrizni), hogy $det(l_1, l_2, l_3) = 0$.

A dualitás következtében kimondhatjuk, hogy három pont (p_1,p_2 és p_3) akkor esik egy egyenesre, ha $det(p_1, p_2, p_3) = 0$.

2.6. Másodrendű felületek

A másodrendű felületeket így írhatjuk le a hagyományos kétdimenziós térben:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

Másodrendű felületek sokfélék lehetnek, annak megfelelően, hogy melyik tagot hagyjuk el (illetve választjuk az együtthatóját nullának). Ráismerhetünk a parabolára, az ellipszisre, körre, ellipszisre,...stb.

Homogén verziója így néz ki a másodrendű felületnek($x = \frac{x_1}{x_3}$ és $x = \frac{x_2}{x_3}$helyettesítésekkel):

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2$$

Mindez vektor-mátrix szorzással is leírható:

$$x^T C x = 0$$

ahol $x = (x_1, x_2, x_3)^T$és

$$C = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

A másodrendű felületeket – általános esetben – öt pont határozza meg, hiszen 6 paramétert kell meghatározni, de a nullával való egyenlőség okán egy szabadságfok megmarad.

Ha mondjuk csak parabolát szeretnénk meghatározni – ahol $b = c = 0$ – , akkor elég három pontot felvenni.

2.7. Egyenesek transzformációja kétdimenzióban

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy egy egyenesre eső pontok lineáris transzformáció után szintén egy egyenesre esnek.

Adott egy egyenes u (homogén koordinátákkal megadva), melyet szeretnénk transzformálni. Legyen az egyenesnek egy tetszőleges pontja p. Ekkor igaz, hogy

$$u^T p = 0$$

Transzformáljuk most el a p pontot egy Amátrixszal. Így megkapjuk a p'-vel jelölt, eltranszformált pontot: $p' = Ap$.

Mivel a transzformáció (a degenerált eseteket kivéve) invertálható, írhatjuk, hogy $p = A^{-1}p'$. Ezek után írhatjuk, hogy

$$u^T p = u^T A^{-1} p'$$

Az u egyenes transzformált képét értelemszerűen jelöljük u'-vel. A most megmutatott összefüggésből egyértelműen látszik, hogy $u' = A^{-T}u$ egyenlőséggel megadott egyenesre fog esni valamennyi u-ra illeszkedő pont az A lineáris transzformáció után.

2.8. Másodrendű felületek transzformációja kétdimenzióban

Az eljárás teljesen hasonlatos az előző szakaszban megmutatott transzformációhoz. Egy C mátrixszal leírt harmadrendű felületre esik a p pont, ha $p^T C p = 0$. A lineáris transzformáció inverzének felhasználásával írhatjuk, $p' A^{-T} C A^{-1} p' = 0$. Tehát igaz, hogy harmadrendű felületen maradnak az eredetileg harmadrendű felület pontjai, és az új felületet a $C' = A^{-T} C A^{-1}$ összefüggés segítségével lehet leírni.

2.9. Pont és egyenes távolsága homogén koordináták segítségével.

Adott egy pont $p = (x_0, y_0)^T$koordinátákkal és egy egyenes, amelynek egyenletét az $ax + by + c = 0$ kifejezéssel adhatunk meg. Ez utóbbi egyenletet írhatjuk $g^T o + c = 0$ alakba, ahol $g = (a, b)^T$ és $o = (x, y)^T$A feladat minimalizálni a $||p - o||$ különbségvektor normáját, azaz a költségfüggvény:

$$J = ||p - o|| = (p - o)^T (p - o)$$

Egy feltétel van, az o pontnak rajta kell lennie az egyenesen: $g^T o + c = 0$. A költségfüggvényből és a feltételből Lagrange-szélsőértékkereséssel új költségfüggvényt határozhatunk meg (a kettővel osztás nem befolyásolja a minimumhelyet, viszont egyszerűsíti a későbbi számítást):

$$J' = \frac{1}{2}(p-o)^T(p-o) + \lambda(g^T o + c)$$

Megoldást o-ra a parciális deriváltfüggvények nullhelyei adják:

$$\frac{\partial J'}{\partial o} = -p + o + \lambda g = 0$$

$$\frac{\partial J'}{\partial \lambda} = g^T o + c = 0$$

Az elsőből $o = p - \lambda g$ adódik, amit a másodikba behelyettesíthetünk:

$$g^T(p + \lambda g) + c = 0$$

Ebből $\lambda = \frac{g^T p + c}{g^T g}$ adódik, o-t pedig így kapjuk:

$$o = p - \frac{g^T p + c}{g^T g} g$$

A két pont közötti tavolság pedig

$$d(p,o) = |p - o| = \left| \frac{g^T p + c}{g^T g} g \right| = \frac{g^T p + c}{g^T g}|g| = \frac{c + g^T p}{g^T g} g^T g = \frac{c + g^T p}{\sqrt{g^T g}}$$

Ezzel meg is határoztuk az eredményt. Homogén koordinátás alakban az egyenest ugyanazokkal a számokkal jelöljük, azaz ha $l$jelöli az egyenest, akkor $l = (a,b,c)^T$és a pedig $p = (u,v,w)$ jelöli. Ebben az esetben a pont és az egyenes távolsága így írható le:

$$d(l,p) = \frac{l^T p}{w\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.10. Kollineális fix pontja

Egy olyan transzformációnál, amely eredményeképpen az eredeti kép egy egyensre eső pontjai az eredményen is egy egyenesre fognap esni, a fix pontot (amelynek a képe önmagába megy át) sajátérték kereséssel határozhatjuk meg:

$$HA = \alpha A$$

Amennyiben H-val jelöljük a transzformációt és A-val a pontot, az eredmény a H jobb oldali sajátértéke lesz. Kétdimeniós esetben H-nak három sajátértéke lesz, fix pontja pedig csak egy, ezért arra lehet számítani, hogy a másik két sajátérték komplex komplex szám lesz.

3. Transzformációk osztályozása

A projektív térben elvégzett transzformációkat annak fényében osztályozzuk, hogy milyen tulajdonságokat őriz meg az eredeti (eltranszformálandó) objektumból.

A transzformációkat kétdimenzióban vizsgáljuk meg, de értelemszerűen kiterjeszthetők háromdimenzióra is.

Adott egy homogén koordinátás pont $p = (u, v, 1)^T$, ahol a harmadik koordináta most 1-gyes és egy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

transzformáció, amely a p pontot a $p' = Ap$ pontba transzformálja.

3.1. Euklédeszi transzformáció

A transzformációk közül a legerősebb az ún. euklédeszi transzformáció. Ennek során a szakaszok hossza és a szakaszok által bezárt szög nem változik meg. Így írhatjuk le:

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$egy ortonormált mátrix.

3.2. Hasonlósági transzformáció

Hasonlósági transzformáció szögtartó, viszont a szakaszhosszokat nem . De a szakaszok egymáshoz képesti arányát megtartja.

A hasonlósági transzformáció így írható le:

$$A = \begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol s valós szám.

3.2.1. A hasonlósági transzformáció kapcsolata az abszolut pontokkal

A hasonlósági transzformáció vizsgálatához be kell egy-két dolgot vezetnünk. Először is engedjük meg, hogy a homogén koordinátás ponton ne csak valós, hanem komplex értékeket is felvehessenek. Ezt minden további nélkül megtehetjük, hiszen a korábban bemutatott tételek komplex számokra is alkalmazhatóak.

Mondjuk ki a legfontosabb tételt: Ha adott egy kétdimenziós projektív transzformáció, melyet a 3×3-as H valós elemű mátrix segítségével írunk le, akkor H euklédeszi transzformáció akkor és csak akkor, ha a $(1, i, 0)^T$ és $(1, -i, 0)^T$ pontokat a valós térben önmagukba képezik le.

Bizonyítás: Először az egyik irányt bizonyítuk, igaz-e, hogy a fentiek szerint definiált Euklédeszi transzformáció a pontokat önmagukba képezik le?

Ennek belátása egyszerű, csak fel kell írni a szükséges egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = ?$$

Most paraméterezzük az ortonormált részmátrixot: $r_{11} = cos\alpha$, $r_{12} = \sin\alpha$,$r_{21} = -\sin\alpha$,$r_{22} = \cos\alpha$. Az egyenlet így módosul, ha a beszorzás után alkalmazzuk az Euler formulát ($e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$):

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & t_x \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha \\ -\sin\alpha + i\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha homogén koordinátákról áttéring valós koordinátákra, akkor a $e^{i\alpha}$ tagot elhagyhatjuk, hiszen skálázásra invariáns a művelet.

A másik irány ennél komplikáltabb. Vegyünk egy általános H valós elemű mátrixot:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Azt szeretnénk, hogy ez a transzformáció őrizze meg a $[1, y, 0]^T$pontot:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} + ih_{12} \\ h_{21} + ih_{22} \\ h_{31} + ih_{32} \end{bmatrix} \sim k \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

ahol k most egy komplex szám. Az egyenletből, ha a homogén koordinátákról valódi koordinátákra terünk át, megfogalmazhatjuk a feltételeket:

$$\frac{h_{11} + ih_{12}}{h_{21} + ih_{22}} = \frac{1}{i}$$

és

$$h_{31} + ih_{32} = 0$$

Mivel H valós elemű mátrix, azaz minden eleme valós szám. Ezért a második feltétel csak akkor teljesül, ha $h_{31} = h_{32} = 0$.

Az első feltételt át lehet alakítani:

$$i(h_{11} + ih_{12}) = h_{21} + ih_{22}$$

Ez átalakítva:

$$ih_{11} - h_{12} = h_{21} + ih_{22}$$

Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $h_{21} = -h_{12}$ és $h_{11} = h_{22}$.
Ezek után felírhatjuk H mátrixot:

$$H = \begin{bmatrix} h_{22} & h_{12} & h_{13} \\ -h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix}$$

Tekintsük a H mátrix bal felső elemét, amelyik ortonormált. Ezért h_{22} és a h_{12} elemeket tudjuk úgy paraméterezni, hogy igaz legyen: $h_{22} = k \cos \alpha$ és $h_{12} = k \sin \alpha$. Osszuk le H mátrixot a h_33 valós számmal, amit megtehetünk, a valódi koordinátákban kapott végeredményt nem befolyásolja. Így a H mátrixunk végleges alakja, és valóban egy hasonlósági transzformáció:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{k}{h_{33}} \cos \alpha & \frac{k}{h_{33}} \sin \alpha & \frac{h_{13}}{h_{33}} \\ -\frac{k}{h_{33}} \sin \alpha & \frac{k}{h_{33}} \cos \alpha & \frac{h_{23}}{h_{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A tételünket csak a $[1, i, 0]^T$ pontra bizonyítottuk be, a $[1, -i, 0]^T$ pontokra a bizonyítás ugyanezen séma szerint elvégezhető. Láthatjuk, hogy az $[1, i, 0]^T$és $[1, -i, 0]^T$ pontoknak kitüntetett szerepük van a projektív geometriában, ezért nevet is adtak nekik: **abszolut pontok**nak hívják őket.

3.2.2. Keresztarány és a hasonlósági transzformáció kapcsolata

Miután bevezettük az abszolut pontok fogalmát, és megvizsgáltuk egy fontos tulajdonságukat, újabb fogalmat definiálunk: a keresztarányt.

Keresztarányt négy, egy egyenesen levő pont között lehet számítani az alábbi összefüggés segítségével:

$$Cr(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\delta_{13}\delta_{24}}{\delta_{14}\delta_{23}}$$

ahol δ_{ij} az i-dik és j-edik pont közötti (euklédeszi) távolság.

A keresztarány invarián a projektív transzformációra

A keresztarány egyik nagyon hasznos tulajdonsága, hogy projektív transzformációra invariáns. Ezt itt a bizonyítás bonyolultsága miatt nem ismertetjük.

A keresztarány és az abszout pontok segítségével kiszámítható kétdimenzióban két egyenes által bezárt szög

Nagyon fontos annak belátása is, hogy két egyenes által bezárt szöget a keresztarány segítségével ki lehet számítani. Ennek belátásához először tekintsünk két egyenest, amelyeket írjunk le az alábbi módon:

$$y = a_1 x + b_1$$

$$y = a_2 x + b_2$$

A két egyenes irányvektorát így kaphatjuk meg: $v_1 = [1, a_1]^T$ és $v_2 = [1, a_2]^T$. (Jól látszik, hogy b_1 és b_2 eltolások nem befolyásolják az irányvektorokat, és ebből kifolyólag a bezárt szöget sem.)

Ha az irányvektort kiegészítjük a harmadik dimenzióval: $v_1' = [1, a_1, 0]^T$ és $v_2' = [1, a_1, 0]^T$, akkor a közbezárt szög tangensét a vektoriális és a skaláris szorzat hányadosával lehet meghatározni:

$$\tan\alpha = \frac{v_1' \times v_2'}{v_1' \cdot v_2'} = \frac{|v_1||v_2|\sin\alpha}{|v_1||v_2|\cos\alpha}$$

Ezek után térjünk át homogén koordinátákra. Az egyeneseket leírhatjuk: $h_1 = [a_1, -1, -b_1]$ és $h_1 = [a_1, -1, -b_1]$. Vegyük a két pontnak a végtelenben lévő egyenessel ($[0, 0, 1]^T$) vett metszéspontját (-1-gyel megszorozhatjuk az eredményt, hiszen egy sakárszorzás nem befolyásolja az eredményt):

$$p_1 = [1, a_1, 0]^T$$

$$p_2 = [1, a_2, 0]^T$$

Elérkezett az idő, hogy elővegyük a keresztszorzatot. Nézzük meg az abszolut pontok ($k = [1, i, 0]^T$, $l = [1, -i, 0]^T$), továbbá $p_1$és p_2 pontok közötti keresztszorzatot:

$$Cr(p_1, p_2, k, l) = \frac{a_1 - i}{a_1 + i} \cdot \frac{a_2 + i}{a_2 - i} = \frac{1 + a_1 a_2 + i(a_1 - a_2)}{1 + a_1 a_2 + i(a_2 - a_1)}$$

Ha az eredményt átírjuk (komplex) polárkoordinátára, és figyelembe vesszük, hogy $tan\alpha = -\tan(-\alpha)$ megkapjuk, hogy

$$Cr(p_1, p_2, k, l) = \frac{e^{i \tan^{-1} \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}}}{e^{i \tan^{-1} \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}}} = e^{2i \tan^{-1} \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2i} log Cr(p_1, p_2, k, l) = \tan^{-1} \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} = \tan^{-1} \frac{v_2' \times v_1'}{v_1' \cdot v_2'} = \alpha$$

3.3. Affin transzformáció

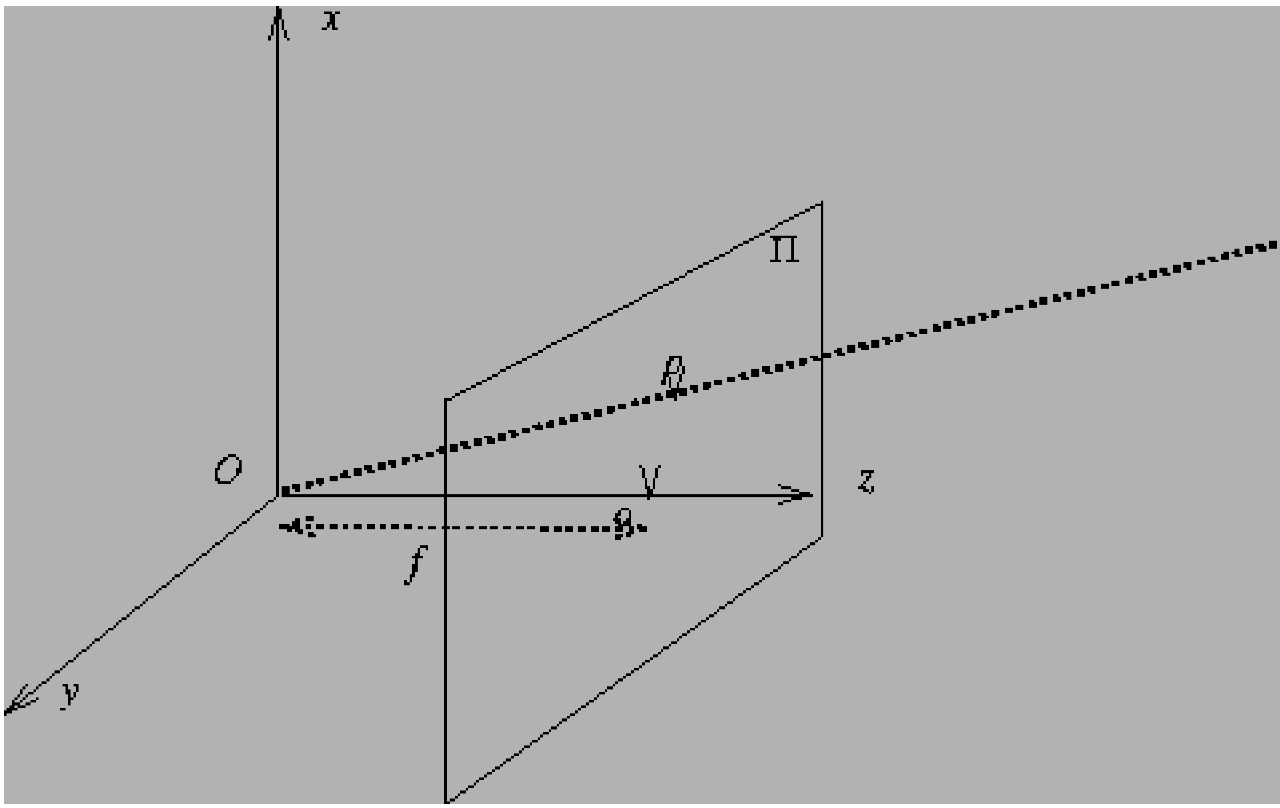
Affin transzformáció csak annyit garantál, hogy a párhuzamos egyenesek a transzformáció után is párhuzamos egyenesek lesznek.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. Perspektív transzformáció

Perspektív transzformáció esetén csak annyi a megkötés, hogy a transzformációt egy 3×3-as mátrixszal szorozzuk.

4. Perspektív vetítés



Perspektív vetítés közelíti a legjobban az emberi látást. A P pont a fókuszponton át lett lekicsinyítve a képsíkra.

Mindezt homogén koordinátákkal is könnyen le lehet írni.

$$x = \frac{fX}{Z}$$

$$y = \frac{fY}{Z}$$

ahol $P = (X, Y, Z)$ valódi koordinátákkal megadott pont és a vetítés a képsíkon a $p = (x, y)$pontokra képzi le a háromdimenziós pontot.

Igaz a kétdimenziós homogén koordinátákra, hogy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha a vetítést kiegészítjük a kamera elmozgatásával is (elforgatás és eltolás - összesen 6 paraméter), továbbá figyelembe vesszük a kamera tulajdonságait is (egy megadott távolságot hány pixelre képez le, mekkora torzítással), akkor az alábbi összefüggéssel tudjuk leírni az egész folyamatot:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim= K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol Ma kameramozgásnak megfelelő 3×4meretű mátrix, K pedig a kameraparamétereket tartalmazó 3×3-mas mátrix, melynek szokásos formája így néz ki:

$$K = \begin{pmatrix} s_x & s_\theta & u_x \\ 0 & s_y & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixban levő paraméterek közül s_x és $s_y$skálázást, u_x és $u_y$pedig eltolást jelent. $s_\theta$értéke általában nulla, ha nem, az azt jelenti, hogy a kamera nem egészen szimmetrikus, egy kis asszimetrikus csavarás van benne.

Megjegyzés: A kamerák ennél a modelnél lényegesen bonyolultabbul képezik le a valóságot, de az itt bemutatott módszer elég jól közelít. A komoly gond általában a nemlinearitásokkal van, hiszen a kameráknak különösen a szélein jelentős nemlineáris torzulások fordulhatnak elő.

5. A projektív tér alapvető tulajdonságai

5.1. Transzformációk a projektív térben

A lineáris transzformációkat ugyanúgy mátrixokkal lehet leírni, mint valódi oordináták esetében. A visszakonvertálás szempontjából - mivel a homogén koordináták konstanssal való szorzására a valóssá konvertált koordináták érzéketlenek - a mátrixnak egy a szabadságfoka.

Klasszikus, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$mátrixxal történő affin-transzformációt, majd $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ vektorral történő eltolást háromdimenzióban az alábbiak szerint lehet leírni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & u_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & u_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{4\times4} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Természetesen nem csak azonos dimenzióból azonos dimenzióba lehet menni, hanem például háromdimenzióból át lehet transzformálni két dimenzióba egy pontot. Erre kiváló példát adnak a különböző vetítések megjelése a kamerán (ezt nevezik projektív kamera kalibrációnak):

$$\begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \\ \lambda \end{pmatrix} = P_{3\times4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mindebből az következik, hogy a kétdimenziós pontokat így kapjuk meg:

$$u = \frac{p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z + p_{14}}{p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z + p_{34}}$$

$$v = \frac{p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z + p_{24}}{p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z + p_{34}}$$

Megjegyzés: a $z = 1$ síkra való projektív vetítés a $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal írható le.

5.2. A projektív tér invariáns jellemzői és a kereszt arány

5.2.1. Keresztarányok és a projektív vonal

Legyen M és N két nem egybeeső pont a projektív térben (tetszőleges dimenzióban). A két pont meghatároz egy egyenest, s ezen az egyenesen levő A pontot két paraméter segítségével le lehet írni:

$$A = \lambda M + \mu N$$

6. Epipoláris geometria

Feladat: adott két kép, és mindkét képen ugyanarról az ún. színtérről (angolul scene) készült felvétel látható. Tehát veszünk egy statikus színteret (néhány objektumot), és készítünk róla két különböző nezőpontból egy-egy felvételt. Ez alapján a két felvétel alapján 3D-ben szeretnénk előállítani a színtéren szereplő objektumokat.

Ennek a feladatnak a megoldában segít az epipoláris geometria.

6.1. Kameratípusok

6.1.1. Perspektív kamera

Perspektív kamera a legáltalánosabb kamera. Ha a koordináta-rendszer középpontát a fókuszpontba helyezzük, a $z = 0$ síkkal párhuzamos a kamerasík (és a fókusztávolság f), és a világ-koordinátarendszerében $(0, 0, f)$pont a kamera saját koordinátarendszerében a $(0, 0)$ pontnak fele meg, akkor a perspektív vetítés esetén a vetített koordinátákat így határozhatjuk meg:

$$x^{'} = \frac{fX}{Z}$$

$$y^{'} = \frac{fY}{Z}$$

Mindez projektív koordinátákkal:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ahol x'és y'a vetített koordináták, (X, Y, Z)pedig a pont eredeti koordinátája (a világ-koordinátarendszerben).

Az így vetített koordináták valódi helye a képen még függhet attól is, hogy a kamera hogyan kalibrált. Ez azt mutatja meg, hogy egy pixel a valóságban mennyi elmozdulásnak felel meg. A kalibrálást a C kalibrációs mátrixszal jellemezhetjük.

$$C = \begin{bmatrix} a & b & -u_o \\ 0 & c & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A vetített koordinátákból a valódi koordinátákat a kalibrációs mátrixszal való szorzással tehetjük meg:

$$\begin{bmatrix} x_{pixel} \\ y_{pixel} \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -u_o \\ 0 & c & -v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ Z \end{bmatrix}$$

Jól látszik, hogy a kalibrációs mátrixban ,a és c jelöli a skálázást, $u_0$és v_0 a koordinátarendszerek közötti eltolást, a b pedig egyfajta (lineáris) torzítást.

6.1.2. Gyengén perspektív kamera

Gyengén perspektív kamera esetén a vetítben a perspektívából adódó kicsinyítés az egész objektumra állandó

$$x' = \frac{fX}{Z_{avg}}$$

$$y' = \frac{fY}{Z_{avg}}$$

6.1.3. Ortografikus kamera (merőleges vetítés)

Merőleges vetítés esetén a kamera a mélység megváltozására érzéketlen. Tehát ha az objektum csak a z tengellyel párhuzamosan mozog, a képen az alakja semmit sem változik. A 2D-s koordinátákat így számítjuk:

$$x' = X$$

$$y' = Y$$

6.2. Transzformáció két kép között

Feladat: adott két kép, amelyiken ugyanazon színtért fényképeztük két különböző nézőpontból. Keressük azt a transzformációt, amelyik az egyik kép megfelelő pontját átveszi a másik kép megfelelő helyére (ahol ugyanaz a pont található).

A két kép rendelkezzen egyelőre két saját világ-koordinátarendszerrel. Ha az egyik képen X jelöli a pont koordinátáit az első kép világ koordinátái szerint, akkor a második kép rendszerének megfelelő koordinátákat úgy kaphatjuk meg, hogy a pontot eltoljuk és elforgatjuk:

$$X' = RX + T$$

ahol $R^T R = E$ a forgatásmátrix, T az eltolás.

Mátrixformában leírva, homogén transzformációkkal:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = [R|T] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

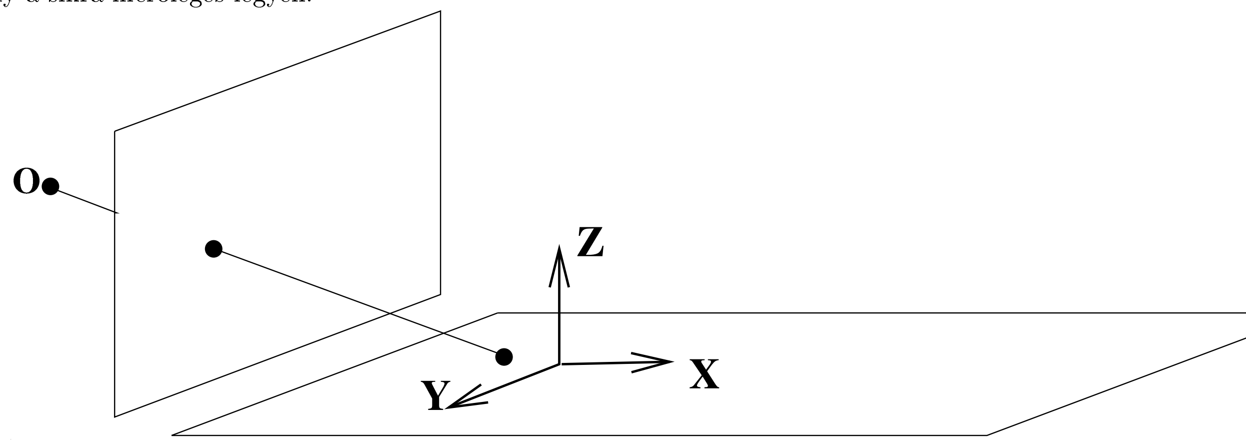
A korrábban bemutatottaknak megfelelően síkba a C kalibrációs mátricszal (kiegészítve az eredeti kalibrációs mátrix egy nulla elemeket tartalmazó negyedik oszloppal) lehet vetíteteni.

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -u_0 & 0 \\ 0 & c & -v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = C[R|T] \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

Szokás a P 3X4-es projekciós mátrixot elnevezni: $P = C[R|T]$, és így $x = P \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$.

6.2.1. Perspektív sík-sík transzformáció

Részfeladat: Adott egy sík, melyet levetítünk egy képsíkra. Az első sík világkoordinátarendszerét válasszuk meg úgy, hogy a harmadik (Z) koordinátatengely a síkra merőleges legyen.



A vetítés:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \sim P \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{41} \\ p_{21} & p_{22} & p_{42} \\ p_{31} & p_{32} & p_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A homogén osztást helyettesíthetjük egy k_1 konstanssal való szorzással:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{41} \\ p_{21} & p_{22} & p_{42} \\ p_{31} & p_{32} & p_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenlet így már invertálható, és a kétdimenziós koordináták segítségével a háromdimenziós pont (továbbra is egy skalárszorzás erejéig bizonytalanul) kiszámítható:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{41} \\ p_{21} & p_{22} & p_{42} \\ p_{31} & p_{32} & p_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát homogén koordinátákat használva a sík-sík transzformáció és inverz transzformáció egy 3x3-mas mátrixszorzással leírható. A mátrix a homogén koordináták miatt szorzásra (skálázásra) érzéketlen, ezért valójában csak nyolc ismeretlent tartalmaz.

Ha van egy másik képünk, amelyen az $[X, Y, 0, Z]^T$ pont látszik, akkor azt is leírhatjuk mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k_2}{k_1} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{41} \\ q_{21} & q_{22} & q_{42} \\ q_{31} & q_{32} & q_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{41} \\ p_{21} & p_{22} & p_{42} \\ p_{31} & p_{32} & p_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{41} \\ h_{21} & h_{22} & h_{42} \\ h_{31} & h_{32} & h_{43} \end{bmatrix} = kH$$

ahol $k = k_2/k_1$jelölést vezettük be, és

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{41} \\ h_{21} & h_{22} & h_{42} \\ h_{31} & h_{32} & h_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{41} \\ q_{21} & q_{22} & q_{42} \\ q_{31} & q_{32} & q_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{41} \\ p_{21} & p_{22} & p_{42} \\ p_{31} & p_{32} & p_{43} \end{bmatrix}^{-1}$$

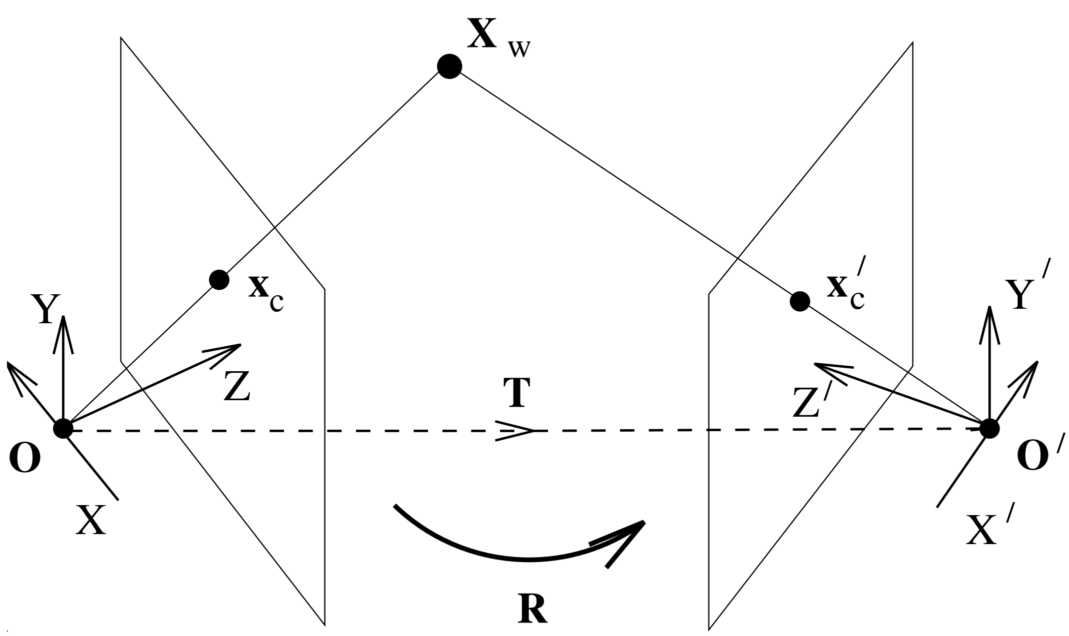
Azaz a két sík minden egyes pontját a kH transzformációk segítségével át lehet vinni.

Megjegyzés #1: Egy sík-sík transzformációt 4 pont meghatároz, hiszen minden egyes pont két-két egyenletet tartalmaz, azaz összesen négy pont kell, hogy a 8 ismeretlent (P elemeit) meghatározzuk.

Megjegyzés #2: Ha a képsíkról akarunk visszevetíteni az eredeti síkra, azt értelemszerűen a P^{-1}-gyel való szorzással lehet megtenni.

Megjegyzés #3: Ha H-t szeretnénk megbecsülni két kép között, egy homogén lineáris (túlhatározott) egyenletrendszer segítségével tehetjük meg.

6.2.2. Egy pont perspektív vetítése két képre



Adott a térben egy pont, X_w.Szeretnénk ennek a pixelekben meghatározott pozícióját leírni. Az euklédeszi koordináta rendszer szerint a két képsík fókuszpontjaiban levő világ koordináta-rendszerek transzformációját egy elforgatás és egy eltolás segítségével le tudjuk írni:

$$X' = RX + T$$

Mindezek a kamera saját koordináta-rendszerében:

$$x_c = f\frac{X}{Z}$$

és

$$x'_c = f'\frac{X'}{Z'}$$

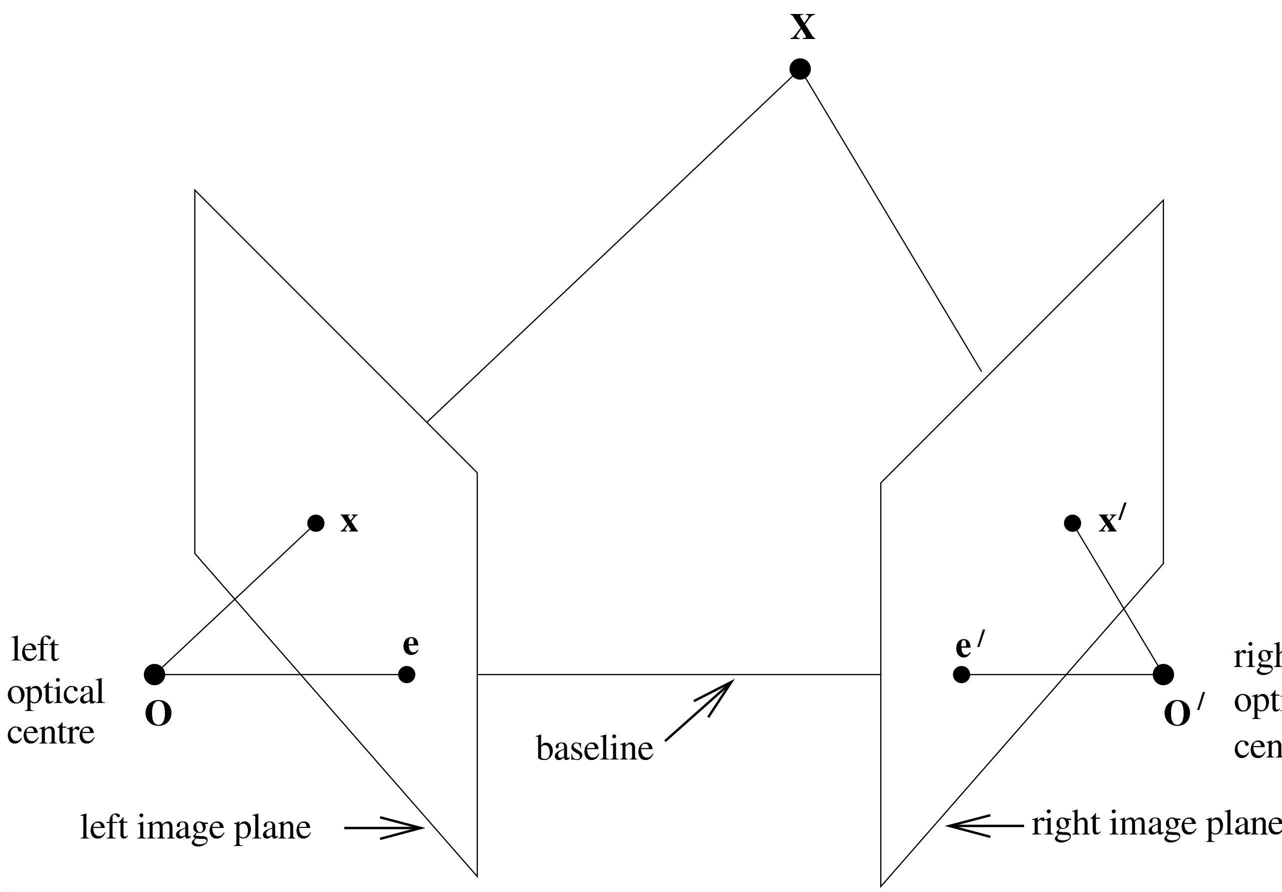
Ha feltételezzük, hogy a világ koordinátarendszer középpontja az első fókuszpont, továbbá a harmadik tengely merőleges a képsíkra, akkor a vetített koordinátákat így írhatjuk le:

$$x_i = PX_w = C[I|0]X_w$$

$$x'_i = P'X_w = C'[R|T]X_w$$

Megjegyzés: ha azonos kamerával vesszük fel a színteret, akkor értelemszerűen$C = C'$.

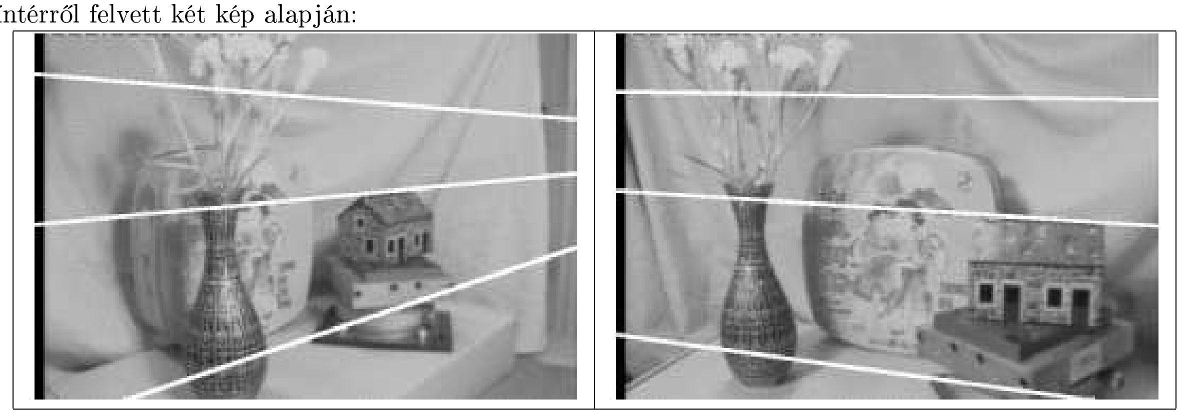
6.3. Az epipoláris geometria bevezetése



Tekintsük az $OO'X$pontok által meghatározott síkot. Ez a sík az első képsíkot az xe pontok által meghatározott egyenesen metszi. Azaz a sík összes pontjának első síkra vetített képe ezen az egyenesen helyezkedik el. A másik képsikon pedog a $e'x'$egyenesre esik. e és e'az a pont, ahol a két kamera fókuszpontját összekötő egyenes elmetszi az első, illetve a második képsíkot.

Elnevezés: e-t és e'-t epipólusnak, $e'x'$ és ex egyeneseket epipoláris vonalnak nevezik. Az epipoláris vonalak az epipólusban metszik egymást, bár elképzelhető, hogy az epipólus a végtelenben van (amennyiben mindkét kamerasík párhuzamos a két fókuszpontot összekötő egyenessel).

A lentebbi ábrán láthatunk példát az apipoláris vonalakra, ugyanarról a színtérről felvett két kép alapján:



6.4. Az esszenciális (lényegi) és fundamentális mátrixok fogalma

Folytassuk gondolatmenetünket! Adott két képsík, amelyre a színteret levetítettük. A két képsík háromdimenziós koordinátarendszereinek transzformációja R forgatás és T eltolás segítségével meghatározható.

$$X' = RX + T$$

Ha ennek az összefüggésnek mindkét oldalát vektoriálisan balról megszorozzuk T-vel, majd ugyancsak balról skalárisan X'-vel, a következő összefüggést kapjuk:

$$X'^T(T \times RX) = 0$$

Ez nem jelent mást, mint hogy OX, $O'X$ és OO' egy síkban vannak.

A fenti összefüggést fel lehet írni más alakban is, ha a vektoriális szorzatot felcseréljük az annak megfelelő mátrix-szorzással:

$$X'^T([T]_X R)X = X'^T EX$$

amennyiben bevezetjük az $E = [T]_x R$jelölést. E neve esszenciális (lényegi mátrix).

Kihasználva, hogy $X = C^{-1}x$ és $X' = C'^{-1}x'$ az összefüggés így is írhatjuk (megjegyzés: a kétdimenzióból háromdimenzióba nem lehet ilyen egyszerűen átmenni, mert $X = C^{-1}x$ helyett $X = \lambda C^{-1}x$ írható, azaz a háromdimenziós pont egy konstans erejéig meghatározatlan - a konstans egyébként a mélység, azonban ez a konstans az egyenletbe visszehelyettesítve kiejthető, mivel az egyenlet jobb oldala nulla.):

$$x'^T C^{-1}([T]_X R)C^{-1}x = x'^T C^{-T} E C^{-1} x = x'^T F x = 0$$

ahol $F = C^{-T}EC^{-1}$ mátrix neve fundamentális mátrix.

Fontos definíció: e-vel szokás jelölni azt a pontot, amelyik az első kamerán a második kamera középpontjának a vetületét tartalmazza. (ez a pont nem feltétlenül van rajta a l átható képen). Azt is tudjuk, hogy T az a vektor, amelyik összeköti a két kamera középpontját, ezárt ebben az esetben $([T]_X R)T = 0$ lesz, ezért írhatjuk, hogy $Ee = 0$, továbbá $Fe = 0$. e-t epipólusnak szokás hívni. Teljesen hasonlóan a második képsíkon is rajta van az első kamera középpontja, azt az epipólust e'-vel jelöljük. Hasonló megfontolások miatt írhatjuk, hogy $F^T e' = 0$.

Ha veszünk a képsíkon egy tetszőleges x pontot, a másik képen a megfelelő pont x' lesz, és igaz, hogy $x'^T F x = 0$. Tudjuk, hogy Fx egy 3D-s vektor, amely a második képen egy egyenesnek felel meg. Mivel $e'^T F = 0$, ezért az is igaz, hogy $e'^T F x = 0$. Tehát e' is rajta lesz az Fx egyenesen. Ezt az egyenest nevezzük az x-hez tartozó epipoláris egyenesnek.

Általánosságban is igaz, hogy egy tetszőleges x ponthoz az első képen F ismeretében meg tudjuk a második képen adni azt az Fx egyenest, amelyen a pont x' vetülete rajta lesz.

Mindez természetesen fordítva is igaz: x' ismeretében $F^T x'$ adja meg a megfelelő epipoláris egyenest, mely nemcsak x-en, hanem e-n is átmegy.

6.5. Rektifikálás + sűrű illesztés

Nagyon fontos megjegyzés: ez az alapja a rektifikálásnak: ha meghatározzuk az epipólust az első képen és a második képen, a két képet áttranszformálhatjuk úgy, hogy az első képen egy tetszőleges egyenes lesz az eredménykép első sora, a másik képen pedig a megfelelő epipoláris vonal. Aztán az első képen kicsi szöggel odébb levő egyenest veszünk, ez lesz a második sor az első képen. A második kép második sora a megfelelő epipoláris egyenes. És így tovább.... Addig megyünk, míg körbe nem érünk.

A rektifikálás előnye, hogy az első rektifikált kép egy tetszőleges pontáról tudjuk, hogy a párja a második rektifikált képen ugyanabban a sorban van. Ezért a pontmegfeleltetéseket újra el tudjuk végezni, és sűrűbb megfeleltetéseket kaphatunk. Ezért hívják a módszert sűrű illesztésnek.

6.6. Fundamentális mátrix becslése

A fundamentális mátrixot becslő algoritmust az $x'^T F x = 0$ egyenlet alapozza meg. Legyen sok pontunk, az i-dik pont koordinátáit jelöljük így:

$$x_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

és

$$x'_i = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

F fundamentális mátrixot pedig írjuk fel 9 darab elem segítségével:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix}$$

A pontra áirhatjuk, hogy $x_i'^T F x_i = 0$
Ez kifejtve:

$$\begin{bmatrix} u'_i & v'_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

A beszorzást elvégezve:

$$\begin{bmatrix} u'_i u_i & u'_i v_i & u'_i & v'_i u_i & v'_i v_i & v'_i & u_i & v_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} = 0$$

Sok pont esetén f_j ismeretlenekre nézve egy túlhatározott homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melyet sajátértékszámítással legkisebb négyzetes értelemben optimális meg tudunk oldani, feltéve, hogy $\sum_j f_j^2 = 1$. (Ezt pedig feltehetjük, hiszen F skálázása nem érdekes.)

6.7. Az esszenciális mátrix felbontása

AZ esszenciális mátrix definíciója tehát $E = [T]_x R$. Amennyiben adott egy E esszenciális mátrix, a feladatunk meghatározni T eltolás és R elforgatásmátrixot. Tudjuk, hogy R ortonormált mátrix, $[T]_x$pedig ferdén szimmetrikus. Mivel $[T]_x$ nemszinguláris mátrix, ezért $[T]_x R$ is nemszinguláris lesz: a rangja maximum kettő. Ezen túl az is bebizonyítható, hogy E szinguláris érték szerinti felbontása szerint két azonos szinguláris értéke lesz, és a harmadik szinguláris érték zérus. (Ez utóbbi következik abból, hogy E rangja maximum kettő, az első tételt pedig nem bizonyítjuk). Ezért E szinguláris érték szerinti felbontása:

$$E = U \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

Ezek után vezessük be a W és Z mátrixokat:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} W$$

A feladat R mátrix és t eltolásvektor meghatározása E-ből. Erre a megoldás:

$$[T]_x = \pm kUZU^T$$

Beszorzással ellenőrizhetjük, hogy valóban a megfelelő alakot kapjuk. Az R mátrixra két megoldást is kapunk:

$$R_1 = UWV^T$$

$$R_2 = UW^TV^T$$

és valóban, mindkét elforgatásmátrix ortonormált.

Összességében tehát $2 \cdot 2 = 4$ megoldás van, amelyből kiszűrhetjük az egyetlen helyes megoldás. A plusz megoldások ott vannak, hogy a vetítési modell azt is megengedi, hogy egy pont a kamera mögött legyen, ilyen azonban a valóságban nem létezik.