Ponthalmazok regisztrációja

Hajder Levente

2007.06.19.

Feladat: Adott két ponthalmaz p_i és o_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, ahol tudjuk, hogy a pontok egy térbeli euklideszi transzformációval (eltolással és elforgatással) egymásba vihetők:

$$p_i = qRo_i + t. \tag{1}$$

Az összefüggésben R egy 3×3-mas ortonormált mátrix, t egy 3-dimenziós eltolásvektor, q pedig a skálázást reprezentáló valós szám.

Amennyiben a pontjaink zajosak, R , q és t becslését szeretnénk meghatározni úgy, hogy az alábbi hiba minimális legyen:

$$J = \sum_{i=1}^{N} ||p_i - qRo_i - t||^2 \tag{2}$$

A konkrét feladat a költségfüggvényt minimalizálni a paraméterek szerint:

$$[R, q, t] = argmin_{R,q,t} J \tag{3}$$

A hibafüggvény kifejtve:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left\{ p_i^T p_i + q^2 o_i^T o_i + t^T t + 2 \left(qt^T Ro_i - p_i^T t - qp_i^T Ro_i \right) \right\} \tag{4}$$

1. A t eltolásvektor számítása

A költségfüggvény t szerinti deriváltja az alábbiak szerint alakul:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} (2t + 2qRo_i - 2p_i) = 0 \tag{5}$$

t-re pedig az alábbi összefüggést kapjuk:

$$t = \left(qR \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} o_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} p_i \right) = 0 \tag{6}$$

Tudjuk, hogy $1/N \sum_{i=1}^{N} o_i$ és $1/N \sum_{i=1}^{N} p_i$ az első, illetve a második objektum súlypontja. Amennyiben origónak választjuk a súlypontot, a skálázás és az eltolás nem változtatja meg a súlypontot: továbbra is az origóban marad. Éppen ezért a megoldás az optimális eltolást adó 6 összefüggés szerint, hogy a súlypontokat az origóba visszük.

2. Optimális forgatás számítása

Tegyük fel, hogy az eltolást már kiküszöböltük, és mindkét objektum súlypontja az origóban van. Az egyszerűbb jelölés kedvéért továbbra is p_i és o_i jelölje a pontok koordinátáit. A költségfüggvény így változik:

$$J' = \sum_{i=1}^{N} \{p_i^T p_i + q^2 o_i^T o_i - 2q p_i^T R o_i\} \tag{7}$$

Első látásra úgy tűnik, hogy a forgatási mátrix (R) és a skálázás (q_f) összefüggenek egymással, szerencsére azonban az optimális forgatást nem befolyásolja a skálázás, hiszen csak a szumma harmadik tagjában szerepel R és q együtt, de q-t ki lehet emelni a szumma elé.

A feladat megoldásához a következő lemmát kell belátnunk:

Lemma: Minden A általános és R ortonormált mátrixra igaz, hogy $Trace(AA^T) \geqslant Trace(RAA^T)$

Lemma bizonyítás: Legyen a_i az i-dik sorvektora az A mátrixnak.

$$Trace(RAA^T) = Trace(A^T RA) = \sum_{i=1}^{N} a_i^T R a_i \tag{8}$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség[1] alapján írhatjuk:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^T R a_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(a_i^T a_i)}(a_i R a_i) <= \sum_{i=1}^{N} a_i^T a_i \tag{9}$$

Ezzel beláttuk a segédtételt, hiszen $\sum_{i=1}^{N} a_i^T a_i = Trace(AA^T)$. ■

Rátérhetünk az optimális forgatás kiszámítását kimondó tételre:

Tétel:A forgatási mátrixra optimális megoldást ad az $R = VU^T$ összefüggés, ahol V és U mátrixok a H mátrix szinguláris-érték szerinti felbontásából jönnek: $H = U\Sigma V^T$, ahol $H = \sum_{i=1}^{N} p_i o_i^T$.

Bizonyítás:

A feladat költségfüggvény minimumának meghatározása R szerint. Mivel csak a harmadik tagban szerepel a forgatásmátrix, a feladat ekvivalens $\sum_{i=1}^{N} q p_i^T R o_i$ maximalizálásával, ami a skálázás kiemelésével és elhagyásával $\sum_{i=1}^{N} p_i^T R o_i$ maximalizálásává alakul át.

Könnyű belátni, hogy $\sum_{i=1}^{N} p_i^T R o_i = Trace(RH)$.

Írjuk fel H szinguláris érték szerinti felbontását: $H = U\Sigma V^T$, ahol U és V 3×3-as ortonormált mátrixok, Σ pedig diagonálmátrix (nemnegatív elemekkel). Legyen $X = VU^T$. Mivel V két ortonormált mátrix szorzata, maga is ortonormált. Írjuk fel X és H szorzatát:

$$XH = VU^T U\Sigma V^T = V\Sigma V^T \tag{10}$$

[1]Két tetszőleges a és b vektorra igaz, hogy $(a^T b)^2 \leqslant (a^T a)(b^T b)$ (A tétel tetszőleges számú vektorra is igaz, de most csak a két vektoros esetet használjuk.)

Eredményül egy szimmetrikus mátrixot kaptunk, melyet AA^T alakban írhatunk fel, ha $A = V\sqrt{\Sigma}$. Emiatt a lemmánkat alkalmazhatjuk:

$$Trace(XH) \geqslant Trace(R_{opt}XH) \tag{11}$$

Azaz a kifejezés $R_{opt} = E$ esetén maximális, vagyis $\sum_{i=1}^{N} p_i^T R o_i$ maximális megoldása $R = X = VU^T$. ■

3. Optimális skálázás számítása

Az optimális eltolás és elforgatás ismeretében a skálázás meghatározása egyszerű. A helyes eredményhez a költségfüggvény q szerinti deriváltját kell nullával egyenlővé tenni:

$$\frac{\partial J'}{\partial q} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ 2q o_i^T o_i - 2p_i^T R o_i \right\} = 0 \tag{12}$$

Ennek pedig a megoldása:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^T R o_i}{\sum_{i=1}^{N} o_i^T o_i} \tag{13}$$

4. Az algoritmus összefoglalása

Végezetül foglaljuk össze az algoritmus lépéseit:

1. A két ponthalmaz súlypontját ki kell számítani, közöttük levő eltolás adja meg a ponthalmazok közötti optimális eltolást.
2. A súlypontokat az origóba kell vinni, majd az eltolt koordinátákból $H = \sum p_i o_i^T$ mátrixot SVD-vel fel kell bontani, és $R = VU^T$ adja az optimális eltolást.
3. Skálázást pedig a $q = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^T R o_i}{\sum_{i=1}^{N} o_i^T o_i}$ hányados segítségével számítható R ismeretében.

Megjegyzés: a módszert természetesen robusztussá lehet tenni RANSAC/LMedS/LTS algoritmusokkal (lásd a robusztus becslőket leíró részt). 3 pont segítségével a transzformációt már ki lehet számolni, ezzel modellt lehet építeni.

5. Nem megfeleltethető ponthalmazok regisztrációja

Ha a két ponthalmazban nem tudjuk párosítani a pontokat, az ICP (Iterative Closest Point) algoritmussal lehet a feladatot megoldani. Ez a következő lépésekből áll:

1. Kézzel (vagy véletlen forgatások segítségével, genetikus algoritmussal,...stb.) kezdeti becslést adunk R-re, t-re és q-ra.
2. Veszük az egyik pontthalmazt, úgy párosítjuk a másik ponthalmazzal, hogy minden ponthoz a hozzá legközelebb állót válaszjuk a másik ponthalmaz elemei közül (A második ponthalmazt R, q, t-nek megfelelően transzformálni kell!)
3. A párosításnak megfelelően kiszámitjuk R-t. t-t, q-t.
4. Ha szignifikánsan csökken a hiba ebben az iterációban, próbálkozzunk még (goto 2).

Fontos megjegyezni, hogy az algoritmus alkalmazása során semmi garancia nincsen arra nézve, hogy konvergál valahova a megoldás, de ha el is érünk konvergenciát, nem biztos, hogy a jó megoldáshoz konvergáltunk...